ОГЛАВЛЕНИЕ

ЭП0201 ср. 18 8-10
ср. 58 3
12
ср. 60. 61 14
16

I. ЛИНЕЙНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

I.I. Общий вид линейной статической модели

В алгебраической форме функциональные связи в линейной статической модели (ЛСМ) описываются в виде равенств и неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = \overline{1,k}); \qquad (I.I)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = \overline{k+1,l}), \qquad (I.2)$$

где a_{ij} и b_i - параметры; x_j - переменные модели.

ЛСМ может быть записана в векторной форме. С использованием понятия скалярного произведения двух векторов $a_p \in E^n$ и $x \in E^n$, где E^n - n-мерное евклидово пространство, эту модель можно представить в виде:

$$a_p x = b_p \qquad (p = \overline{1,m})$$

или

$$a_p x \lneqq b_p \qquad (p = \overline{1,m}), \qquad (I.3)$$

где a_p - вектор-строка параметров,

$$a_p = (a_{p1}\ a_{p2} \dots a_{pn}); \qquad (I.4)$$

b_p - компонента вектор-столбца,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \qquad (I.5)$$

x - вектор-столбец переменных модели,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (I.6)$$

Знак неравенства $\leqslant$ в векторных соотношениях (I.3) означает, что все компоненты правого и левого векторов одновременно в равенство обратиться не могут; знак неравенства $\leqq$ допускает такую возможность.

Применяется и векторно-матричная форма представления ЛСМ:

$$ax \leq b \qquad \text{или} \qquad ax \leqq b, \qquad (I.7)$$

где a - прямоугольная матрица размером $m \times n$,

45

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (I.8)$$

Считаем, что переменные могут принимать любые вещественные значения в E^n.

В экономическом анализе часто используют модели с переменными, принимающими только неотрицательные значения. Это так называемые прямые ограничения на переменные. Модель записывается в виде:

$$ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0. \qquad (I.9)$$

Встречаются также модели с переменными, принимающими только целочисленные значения:

$$ax \leqslant b, \qquad (I.10)$$

где x – целочисленная переменная.

I.2. Экономические основания и особенности модели затраты-выпуск

Среди ЛСМ, используемых в экономико-математическом моделировании, важное место отводится модели затраты-выпуск, известной как простая модель Леонтьева. Модель позволяет исследовать экономические объекты и системы различного уровня – от народного хозяйства в целом до отдельного производителя или потребителя.

Целью моделирования является установление условий экономического равновесия, которое характеризуется равенством спроса и предложений всех производимых и потребляемых продуктов.

Простая модель Леонтьева, описывающая производство, имеет особенности. Первой особенностью является задание технологической характеристики в форме матрицы технологических коэффициентов, называемых также коэффициентами прямых материальных затрат. Значения этих коэффициентов определяются эмпирическим путем, т.е. модель строится на фактической основе.

Вторая особенность состоит в том, что при моделировании принимается во внимание взаимозависимость производственных планов и видов деятельности в исследуемых производственных процессах или отраслях народного хозяйства.

Модель названа простой поскольку предполагается, что два различных продукта не могут производиться в одном процессе и два различных процесса не участвуют в создании какого-либо одного про-

как при этом изменится экономико-математическая модель равновесия системы.

I4. Предприятие производит один потребительский продукт Z, используя два вида факторов X и Y. Производственная функция известна $f(x, y, z) \equiv xy - az = 0$,
где a – положительная постоянная; X и Y – отрицательны (используемые ресурсы), Z – положительно (выпуск продукции). Составить экономико-математическую модель условий производства в состоянии равновесия.

I5. К производственным условиям задачи I4 добавить наличие двух индивидуумов с квадратичными функциями полезности. Первый индивидуум предлагает фактор X и не предъявляет спроса на фактор Y. Второй индивидуум предлагает фактор Y и не предъявляет спроса на фактор X.

Первый индивидуум предлагает также предпринимательские услуги. Оба предъявляют спрос на продукт Z, но не имеют его в качестве запаса.

Выразить индивидуальный спрос через цены. Дать полное описание системы в форме экономико-математической модели равновесия.

I6. В задаче I4 замените производственную функцию на $f(xyz) \equiv xy - az^2 = 0$. Опишите условие производства. Покажите, что в этом случае прибыль в системе окажется равной нулю.

45

распределены на соответствующее каналообразующее оборудование в качестве K_1 и на линейные сооружения в количестве K_2.

Известны производственные функции F_1 и F_2, определяющие соответствующие количества каналов, где F_1 и F_2 – функциональные операторы, преобразующие затраты средств двух видов в количества каналов.

Определить максимальный объем организуемых каналов в условиях заданных ограничений.

10. Имеется два вида товаров, которыми обмениваются два потребителя.

Начальные запасы товаров известны: $\overline{X_{11}}, \overline{X_{12}}, \overline{X_{21}}, \overline{X_{22}}$. Известны функции полезности товаров для потребителя:

$$S_1(X_{11}X_{12}) = a_1 x_{11}^2 + 2h_1 X_{11} X_{12} + b_1 X_{12}^2;$$

$$S_2(X_{21}X_{22}) = a_2 x_{21}^2 + 2h_2 X_{21} X_{22} + b_2 X_{22}^2.$$

Составить экономико-математическую модель обмена в состоянии равновесия и выразить индивидуальный спрос на товары явно через отношение цен на эти товары и начальные запасы товаров.

11. Показать, что в предыдущей задаче рыночные условия сводятся к одному кубическому уравнению относительно отношения цен. Исследовать условия, накладываемые на описание функций полезности, при которых существует по крайней мере одно положительное значение отношения цен на товары, совместное с равновесием.

12. Рассмотрите экономико-математическую модель равновесия в сфере обмена и производства. Пусть для какого-либо потребительского товара $x_t = \overline{x_t}$, т.е. спрос на товар t-го вида полностью удовлетворяется за счет обмена. Как изменится при этом экономико-математическая модель. Будет ли система уравнений совместна с положением равновесия.

13. Допустим в экономико-математическую модель обмена и производства введем некоторый промежуточный продукт с индексом u. На этот продукт не предъявляется индивидуальный спрос и начальные запасы его отсутствуют. Он производится из факторов производства с известными неизменными технологическими коэффициентами a_{ru} и кроме того сам потребляется в производстве продуктов – предметов потребления (также с неизменными коэффициентами a_{ut}). Показать,

дукта. Также считается, что в любом процессе производства продукции все ресурсы (факторы производства) используются в твердо установленных соотношениях, и что применение ресурсов расширяется пропорционально объему выпускаемой продукции.

Модель является статической, поскольку при ее построении не учитываются такие стороны экономической системы как, капиталовложения, доходы и потребление государства, внешняя торговля и другие элементы динамики системы.

1.3. Математическая модель открытой экономической системы затраты–выпуск

Модель отражает производство из n технологических процессов, в каждом из которых организован выпуск однородной продукции.

Количество продукта, выпускаемого в i-м процессе, обозначим через $x_i\ (i=\overline{1,n})$. Этот продукт потребляется в виде промежуточного другими процессами и в виде конечного продукта непосредственно потребителями.

Промежуточный продукт обозначим через x_{ij}. Это количество продукта i-го процесса, потребляемого j-м процессом; конечный продукт обозначим через y_i. Таким образом, функциональные связи между этими переменными в состоянии равновесия имеют вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i=\overline{1,n}) \qquad (1.11)$$

Наряду с промежуточными и конечными продуктами в модель вводятся величины, описывающие первичные продукты. В общем случае под первичными продуктами понимают такие, которые имеются в системе в ограниченном количестве и не могут быть воспроизведены ни в каком технологическом процессе. Таким свойством удовлетворяют в частности оборудование и труд. В простой модели учитывается только один вид первичного продукта – трудозатраты в производстве Z и в каждом из процессов $z_j\ (j=\overline{1,n})$. Таким образом, в состоянии равновесия

$$Z = \sum_{j=1}^{n} z_j. \qquad (1.12)$$

Технологические особенности и ограниченные возможности каждого из производственных процессов учитывают заданием в модели производства параметров a_{ij} и K_j.

Значения параметров a_{ij}, называемых коэффициентами прямых материальных затрат, указывают количество потребляемого j-м

45

процессом i -го продукта, необходимого в единицу времени (в год), для ежегодного выпуска в j -м процессе одной единицы продукта. Эти значения получают эмпирическим путем.

Значения параметров K_j определяют количество трудозатрат в год для ежегодного выпуска в j -м процессе одной единицы продукта.

Таким образом, получаем следующую систему уравнений, описывающую условия равновесия экономической системы с учетом особенностей производства:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad (i = \overline{1,n});$$
$$Z = \sum_{j=1}^{n} K_j x_j . \qquad (I.13)$$

Система (I.13) состоит из n+I уравнений, а переменными могут быть или товарная продукция процессов x , или их конечная продукция y . Поэтому можно сформулировать три типа задач, описываемых этой моделью:

I) известны коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} и объемы y_i конечного продукта всех процессов; найти объемы производства x_i каждого процесса;

2) при заданных объемах производства x_i всех процессов и известных коэффициентах прямых материальных затрат a_{ij} ; найти объемы конечной продукции y_i всех процессов;

3) известны коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} , заданы объемы производства одной части процессов и объемы производства конечной продукции другой части процессов производства; найти объемы конечной продукции первой части процессов и объемы производства другой.

Все эти задачи решаются в рамках статической модели, поскольку не учитывается связь объемов производства процессов x , произведенных в исследуемом периоде, с их значениями в предшествующих и последующих периодах.

Система уравнений (I.13) не полностью описывает равновесие производства, поскольку не определены цены на продукты, соответствующие этому состоянию. Обозначим цены на продукты через p_j и вводим эти переменные в модель в форме вектор-столбца

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} . \qquad (I.14)$$

5. Определить знак второй производной функции прибыли в предыдущей задаче. Зачем это нужно?

6. На предприятии организовано два способа производства одного и того же продукта. Издержки производства при каждом способе производства известны:

по первому способу

$$C_1(y_1) = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 ,$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные положительные числа;

по второму способу

$$C_2(y_2) = b_0 + b_1 y_2 + b_2 y_2^2 ,$$

где b_0, b_1, b_2 – постоянные положительные числа.

За некоторый промежуток времени необходимо произвести ровно a единиц продукции, распределив ее производство между двумя способами так, чтобы общие издержки были минимальными. Определить соответствующие объемы выпуска продукции.

7. Имеется n производственных единиц, каждая из которых производит одну и ту же продукцию, используя для этого общий для всех ресурс.

Производство в i -й производственной единице определяется производственной функцией

$$y_i = a_i \sqrt{x_i} \quad (i = \overline{1,n}),$$

где x_i – количество затрачиваемого ресурса.

Необходимо так распределить имеющийся ресурс между производственными единицами, чтобы выполнить план по выпуску в объеме Y_0 , а затраты ресурса были бы минимальными.

8. Известна производственная функция

$$y = a x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} .$$

Заданы цены за факторы производства p_1 и p_2 . Определите оптимальную структуру затрат, при которой достигается заданный объем производства при минимальных затратах ресурсов.

9. На предприятии связи организована передача информации по телефонным и телеграфным каналам. Цены за каналы известны: p_1 и p_2 . Доход определяется суммой доходов от каждого вида передачи информации.

На организацию каналов затрачены ограниченные средства, которые

45

2.8. Примеры для контрольных работ

I. Цена единицы продукции равна p. Приобретая Q единиц продукции, потребитель стремится максимизировать разность между полезностью S, измеренной в денежном исчислении, и стоимостью продукции. Показать, что он должен купить столько продукции, чтобы предельная полезность ее была равна цене.

2. Известны функции спроса

$$p = 100-0{,}01Q$$

и издержек

$$C = 50Q + 30000.$$

Определить выпуск продукции, обеспечивающей наибольшую прибыль, величину этой прибыли и равновесную цену продукции.

3. Известны функции спроса

$$p = 114 - 0{,}25Q$$

и издержек

$$C = 120Q - Q^2 + 0{,}02Q^3 .$$

Определить объем выпуска, для которого:

а) средние издержки C будут минимальными;

б) будет ли при таком объеме производства прибыль максимальна;

в) при скольких значениях выпуска предельные издержки равны предельному доходу;

г) будет ли прибыль максимальной при этих значениях выпуска;

д) изобразите графически изменения цены и средних издержек в зависимости от объемов выпуска.

4. Известны функции спроса

$$p = a - bQ$$

и издержек

$$C = W + vQ ,$$

где a, b, W, v – постоянные положительные числа.

Пусть установлен налог с продаж на продукцию предприятия в t р. с каждой единицы выпуска. В результате этого производителю выгодно поднять цену с p до p_1. Показать, что

$$p_1 - p = t/2,$$

т.е. что производителю выгодно переложить на потребителя только половину суммы налога.

Для стоимостной оценки трудозатрат в модель вводится еще одна переменная ω, определяющая ставку заработной платы на рынке труда.

Модель описывает производство с постоянными пропорциями в использовании ресурсов каждым из производственных процессов. Это означает, что в состоянии равновесия, т.е. в состоянии равенства спроса и предложения всех потребляемых и производимых продуктов, а также первичного продукта, прибыль каждого из процесса равна нулю, т.е. доход в j-м производственном процессе равен общим издержкам в этом процессе и, следовательно,

$$p_i x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} + \omega z_j . \qquad (I.15)$$

С учетом того, что

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \quad \text{и} \quad z_j = h_j x_j ,$$

получаем систему уравнений относительно равновесных значений цен производимых продуктов:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} + \omega h_j \qquad (j = \overline{1,n}). \qquad (I.16)$$

Система уравнений (I.13) и (I.16) представляет математическую модель простого производства, называемую открытой простой моделью Леонтьева. Число уравнений в этой системе равно $2n+1$. Общее число неизвестных включает:

n значений объемов производства x_i;

n значений конечной продукции y_i;

n значений цен p_i $(i = \overline{1,n})$;

значение трудозатрат Z;

ставку заработной платы ω, т.е. всего $3n+2$ неизвестных.

Следовательно, для того, чтобы система уравнений имела единственное решение надо задать $n+1$ значений для переменных. Можно считать известными цены продуктов p_i и ставку заработной платы ω. Однако, это накладывает жесткое ограничение на моделируемое производство, поскольку условие (I.16) требует, чтобы заданные цены и ставка заработной платы были совместны с технологическими особенностями производства. Поэтому большее распространение получили модели, в которых задаются значения конечной продукции y_i и ставка заработной платы ω.

Системы уравнений, описывающие стоимостные и технологические условия равновесия, не связаны друг с другом, так что уравнениями каждой из этих систем можно пользоваться независимо. В частности, если задана ставка заработной платы, то n уравнений системы (I.I6) определят n цен равновесия продуктов p_i, которые представляют и цены предложения. Тогда, если данная открытая модель превращается в замкнутую, то эти цены вместе с заданными объектами конечной продукции y_i могут быть сопоставлены с функцией опроса.

Система уравнений (I.I3), (I.I6) может быть представлена в векторно-матричной форме. Для этого в модель вводится матрица технологических условий производства

$$A = E_n - a, \qquad (I.I7)$$

где E_n – единичная матрица размеров $n \times n$; a – матрица технологических коэффициентов.

Предполагается также, что $x_{ii} = 0$ и, следовательно, $a_{ii} = 0$.

Технологическая матрица A является производственной функцией, описывающей связь между затратами и выпуском в производстве из n технологических процессов с постоянными пропорциями в использовании ресурсов. В развернутом виде

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 & -a_{23} & \dots & -a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & & 1 \end{bmatrix}. \qquad (I.I8)$$

Как видим, в этой матрице все коэффициенты затрат имеют отрицательный знак, а элементы на главной диагонали равны I. Можно считать, что каждый столбец этой матрицы описывает технологию соответствующего процесса. Элемент столбца, равный I, соответствует единичному выпуску продукции, отрицательные же элементы этого столбца соответствуют затратам в соответствующих натуральных измерителях, необходимым для выпуска единицы продукции.

С введением этой матрицы система уравнений (I.I3), (I.I6) может быть записана в форме

$$Ax = y; \qquad (I.I9)$$

$$Z = K'X; \qquad (I.20)$$

$$A'p = \omega K, \qquad (I.2I)$$

где знак $'$ означает транспонирование.

Таблица 2.I

Уравнения математической модели	Номера уравнений	Число уравнений
I. Масштаб цен	(2.I09)	I
2. Потребление индивидуумов	(2.I05), (2.I06), (2.II3), (2.II4)	4
3. Производственные условия	(2.II5), (2.II8), (2.II9)	3
4. Равенство спроса и предложения	(2.I22), (2.I23)	2
5. Определяют общую прибыль в системе (прибыль первого предпринимателя)	(2.I24)	I
6. Определяют рыночное равновесие	(2.I25), (2.I26)	2
Общее число уравнений модели равновесия		I3

Определим число переменных в системе. Данные сведем в таблицу.

Таблица 2.2

Назначение переменных	Обозначение	Число переменных
I. Количество потребительных продуктов	x_{ih}, $i = 1, 2$; $h = 1, 2, 3$	6
2. Значение цен на продукты	p_h, $h = 1, 2, 3$	3
3. Количество продукции различных видов, участвующих в производстве	y_{jh}, $j = 1$, $h = 1, 2, 3$	3
4. Прибыль в системе	$R = R_1$	I
Общее число переменных		I3

Таким образом, видим, что число уравнений равно числу переменных и, следовательно, математическая модель замкнута и совместна (в соответствии со смыслом поставленной задачи) с положением равновесия исследуемой экономической системы.

В состоянии равновесия поведение потребителей определяется законом Вальраса:

$$\sum_{k=1}^{3} p_k (x_{ik} - \overline{x}_{ik}) = R_i \qquad (i = 1,2) \qquad (2.121)$$

или в развернутой форме записи для моделируемой системы получаем систему из двух уравнений, описывающих равенство спроса и предложения:

$$p_1(x_{11} - \overline{x}_{11}) + p_2 x_{12} + x_{13} = R_1 ; \qquad (2.122)$$

$$p_1 x_{21} + p_2 (x_{22} - \overline{x}_{22}) + x_{23} = 0 , \qquad (2.123)$$

где R_1 – прибыль, получаемая первым индивидуумом на организованном им производстве продукции третьего вида. Значение прибыли вычисляется по формуле:

$$R_1 = p_1 y_{11} + p_2 y_{12} + R_3 y_{13} . \qquad (2.124)$$

Значения переменных, определяющих объем продукции и количество факторов производства, определяются из условия рыночного равновесия (равенства покупок и продаж). Это условие для моделируемой системы описывается системой из двух уравнений

$$y_{11} = x_{11} - \overline{x}_{11} + x_{21} ; \qquad (2.125)$$

$$y_{12} = x_{12} + \overline{x}_{22} - x_{22} . \qquad (2.126)$$

Подсчитаем теперь общее число уравнений, входящих в систему уравнений, описывающих модель общего равновесия. Данные сведем в табл. 2.1.

Уравнения системы (1.19) – (1.21) имеют разную размерность; чтобы система имела более широкое применение и позволяла проводить сравнения результата с затратами, уравнения системы должны иметь единую стоимостную размерность. Для этого представим все слагаемые в уравнениях равновесия в стоимостной форме.

Так, товарный выпуск i -го процесса в денежном выражении

$$V_i = p_i x_i \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (1.22)$$

распределяется следующим образом:

$$v_{ij} = p_i x_{ij} , \quad v_i = p_i y_i \quad (i = \overline{1,n} ; j = \overline{1,n}). \qquad (1.23)$$

При ставке заработной платы ω общая сумма заработной платы

$$W = \omega z . \qquad (1.24)$$

Соответственно следует видоизменить и коэффициенты затрат:

$$\alpha_{ij} = \frac{v_{ij}}{V_j} = \frac{p_{ij} x_{ij}}{p_j \, x_j} = \frac{p_i}{p_j} a_{ij} ; \qquad (1.25)$$

$$\beta_j = \frac{\omega z_j}{V_j} = \frac{\omega z_j}{p_j x_j} = \frac{\omega}{p_j} k_j . \qquad (1.26)$$

Из этих выражений следует, что α_{ij} – это стоимость использованного продукта i -го процесса, а β_j – оплата потребленного первичного продукта (труда) на единицу производственного продукта в j -м процессе. Принципиальное отличие α_{ij} и β_j от соответствующих коэффициентов a_{ij} и k_j состоит в том, что эти коэффициенты затрат, но в стоимостном измерении, уже не являются более постоянными величинами, они зависят как от условий производства, так и от цен на продукты.

В целом стоимостная матрица затрат и результатов может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{r} n \text{ строк} \\ \text{1 строка} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c} v_{ij} & v_i & V_i \\ \hline \omega z_i & 1 & W \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} n \text{ столбцов} & \text{1 столбец} & \text{итоговый столбец} \end{array} \end{array} . \qquad (1.27)$$

Элементы этой матрицы можно складывать как вдоль столбцов (по горизонтали), так и вдоль строк (по вертикали), поскольку все они имеют одинаковую размерность.

В результате сложения по горизонтали (вдоль первых n +I столбцов) имеем стоимость выпуска i -го процесса V_i и общую сумму оплаты первичного продукта, или после преобразований

$$V_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V_j = v_i \qquad (i = \overline{1,n}); \tag{I.28}$$

$$W = \sum_{j=1}^{n} \beta_j V_j . \tag{I.29}$$

В результате сложения по вертикали имеем общую сумму издержек в j -м процессе:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ij} + \omega z_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} V_j + \beta_j V_j \qquad (j = \overline{1,n}). \tag{I.30}$$

Поскольку в состоянии равновесия прибыль должна равняться нулю, то общие издержки j -го процесса должны быть приравнены доходу в этом процессе, а значит

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} V_j + \beta_j V_j = V_j \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{I.31}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} + \beta_j = 1 \qquad (j = \overline{1,n}). \tag{I.32}$$

I.4. Анализ и решение математической модели затраты–выпуск

Поскольку модель открытая, будем считать, что известны:
значения конечной продукции – вектор y ;
ставка заработной платы на рынке труда ω .

Производство включает n производственных процессов; все они реальны и независимы, следовательно, технологическая матрица производства A неособенная, а поэтому она имеет обратную матрицу A^{-1} , которую обозначим через B :

$$B = A^{-1} = (E_n - a)^{-1} = \frac{1}{|E_n - a|} \cdot \overline{(E_n - a)} = [b_{ij}], \tag{I.33}$$

где $|E_n - a|$ – определитель матрицы A ; $\overline{(E_n - a)}$ – матрица, присоединенная к матрице A .

Элементы b_{ij} матрицы B называются коэффициентами полных материальных затрат.

Уравнение (I.19) умножим почленно слева на матрицу B , полу–

Из выражений (2.III) и (2.II2) с учетом (2.I03) и (2.I04) для нашей модели получаем следующие уравнения, описывающие условия получения наибольшей полезности:

$$a_1 x_{11} + h_1 x_{13} = p_1 (h_1 x_{11} + b_1 x_{13}); \tag{2.II3}$$

$$a_2 x_{22} + h_2 x_{23} = p_2 (h_2 x_{22} + b_2 x_{23}). \tag{2.II4}$$

Опишем условия производства. Во-первых, эта – сама производственная функция, заданная в неявной форме (2.I07), т.е.

$$y_{11} y_{12} - a y_{13} = 0, \tag{2.II5}$$

а также условия, определяющие получение наибольшей прибыли в состоянии равновесия:

$$\frac{f_{11}}{p_1} = f_{13}; \qquad \frac{f_{12}}{p_2} = f_{13}, \tag{2.II6}$$

где $$f_{11} = \frac{\partial f_1 (y_{11}, y_{12}, y_{13})}{\partial y_{11}};$$

$$f_{12} = \frac{\partial f_1 (y_{11}, y_{12}, y_{13})}{\partial y_{12}}; \tag{2.II7}$$

$$f_{13} = \frac{\partial f_1 (y_{11}, y_{12}, y_{13})}{\partial y_{13}}.$$

Из выражений (2.II6) и (2.II7) с учетом (2.II5) для нашей модели получаем следующие уравнения, описывающие условия получения наибольшей прибыли:

$$\frac{y_{12}}{p_1} = -a; \tag{2.II8}$$

$$\frac{y_{11}}{p_2} = -a. \tag{2.II9}$$

или

$$y_{12} = -a p_1 \qquad \text{и} \qquad y_{11} = -a p_2 . \tag{2.I20}$$

45

Выражение (2.107) это – запись производственной функции в общей (неявной) форме ее представления. В соответствии с положениями теории переменные y_{11} и y_{12} принимают неположительные значения, модули этих переменных определяют количество продуктов первого и второго видов, используемых на производство, организованное первым индивидуумом для выпуска продукции третьего вида в количестве y_{13}. Переменная y_{13} принимает неотрицательные значения, т.е.

$$y_{11} \le 0; \quad y_{12} \le 0; \quad y_{13} \ge 0. \tag{2.108}$$

Наконец, для математического описания состояния равновесия необходимо еще ввести переменные P_1, P_2 и P_3, определяющие цены товаров на рынках в условиях чистой конкуренции. Поскольку в состоянии равновесия определяются не абсолютные значения цен на товары, а лишь их структура, то можно положить, что

$$P_3 = 1, \tag{2.109}$$

и определить лишь отношения

$$\frac{P_1}{P_3} = P_1 \quad \text{и} \quad \frac{P_2}{P_3} = P_2. \tag{2.110}$$

Теперь можно установить все связи, действующие в системе. Из теории известно, что в состоянии равновесия в условиях чистой конкуренции каждый потребитель получает максимальную полезность в пределах имеющихся у него возможностей, а предприниматель реализует максимальную прибыль.

Уравнения, описывающие условия получения максимальной полезности для моделируемой системы, имеет вид:

$$\frac{S_{11}}{P_1} = S_{13}; \quad \frac{S_{22}}{P_2} = S_{23}, \tag{2.111}$$

где

$$S_{11} = \frac{\partial S_1(x_{11}, x_{13})}{\partial x_{11}}; \quad S_{13} = \frac{\partial S_1(x_{11}, x_{13})}{\partial x_{13}}; \tag{2.112}$$

$$S_{22} = \frac{\partial S_2(x_{22}, x_{23})}{\partial x_{22}}; \quad S_{23} = \frac{\partial S_2(x_{22}, x_{23})}{\partial x_{23}}.$$

чим

$$B \cdot Ax = By,$$

поскольку $BA = E_n$, а $E_n x = x$ имеем решение в матричной форме

$$x = By. \tag{I.34}$$

Определим экономический смысл коэффициентов матрицы B.

Предположим, в частности, что конечная продукция производства сводится к одной единице конечной продукции первого процесса, т.е.

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{I.35}$$

Определим, сколько продукции в таком случае требуется произвести в каждом из n производственных процессов. Подстановка (I.35) в (I.34) дает

$$x = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \tag{I.36}$$

Так как все остальные слагаемые в этой системе равны нулю. Таким образом, элементы первого столбца матрицы B выражают объемы продукции в натуральном измерении, которые следует произвести в каждом из производственных процессов, чтобы получить только единицу чистой продукции (продукции конечного спроса) в первом процессе. Аналогично показывается экономический смысл элементов других столбцов матрицы B.

Следовательно, коэффициент b_{ij} показывает сколько нужно произвести продукции i-го вида, чтобы была произведена единица конечной продукции в j-м технологическом процессе. Числа b_{ij} называются коэффициентами полных материальных затрат. Из экономического смысла этих коэффициентов следует, что все они неотрицательны:

$$b_{ij} \ge 0.$$

Матрица B, определяемая равенством (I.33), называется матрицей полных затрат.

I.5. Открытая математическая модель простого производства трех видов продукции

Пусть производство включает три технологических процесса, в каждом из которых организован выпуск однородной продукции. Считаем известными производственную функцию A, вектор конечной продукции Y, вектор трудозатрат K и ставку заработной платы ω на рынке труда. Требуется составить экономико-математическую модель производства, определить объемы производства X и цены продукции в состоянии равновесия. Считать $a_{ii} = 0$.

В алгебраической форме связь объемов производства X с конечной продукцией Y дается системой уравнений

$$
\begin{aligned}
x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 &= y_1 ;\\
-a_{21}x_1 + x_2 - a_{23}x_3 &= y_2 ;\\
-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + x_3 &= y_3 .
\end{aligned}
$$

Данная система уравнений может быть решена методом Гаусса или методом Крамера.

Записываем технологическую матрицу

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{bmatrix} .
$$

Пусть $|A|$ – определитель матрицы A, а A_{ij} – алгебраические дополнения матрицы A, например,

$$
A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -a_{23} \\ -a_{32} & 1 \end{vmatrix}
$$

и т.д.

В этих обозначениях решение модели в состоянии равновесия имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{|A|}\left(A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3\right);\\
x_2 &= \frac{1}{|A|}\left(A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3\right);\\
x_3 &= \frac{1}{|A|}\left(A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3\right).
\end{aligned}
$$

Общие затраты труда на производстве составят

$$
Z = K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 .
$$

Для определения равновесных цен следует решить систему

$$
\begin{aligned}
p_1 - a_{21}p_2 - a_{31}p_3 &= \omega K_1 ;\\
-a_{12}p_1 + p_2 - a_{32}p_3 &= \omega K_2 ;\\
-a_{13}p_1 - a_{23}p_2 + p_3 &= \omega K_3 .
\end{aligned}
$$

продуктов третьего вида, получая при этом определенную прибыль. Известна производственная функция, описывающая зависимость выпуска на организованном производстве.

Система функционирует в условиях чистой конкуренции.

Требуется построить экономико-математическую модель равновесия рассматриваемой экономической системы. Введем переменные и параметры модели и опишем известные функциональные связи в системе.

Количество потребляемых продуктов обозначим через x_{ik}, где i = I, 2 – целочисленная переменная, определяющая потребителей, а k = I, 2, 3 – целочисленная переменная, которая определяет продукты первого, второго и третьего видов, потребляемые каждым из индивидуумов. Таким образом, x_{ik} – количество продуктов k-го вида, потребляемое i-м индивидуумом. Соответственно, начальные запасы обозначим через $\overline{x_{ik}}$.

Функции полезности – квадратические:

для первого потребителя

$$
S_1(x_{11}\, x_{13}) = a_1 x_{11}^2 + 2h_1 x_{11} x_{13} + b_1 x_{13}^2 ; \tag{2.I03}
$$

для второго потребителя

$$
S_2(x_{22}\, x_{23}) = a_2 x_{22}^2 + 2h_2 x_{22} x_{23} + b_2 x_{23}^2 . \tag{2.I04}
$$

Коэффициенты квадратических форм – положительные числа. В формулу (2.I03) не входит переменная x_{12}, поскольку $x_{12} = 0$, так как первый не предъявляет индивидуального спроса на продукты второго вида, аналогично и в отношении переменной x_{21} в описании функции полезности второго индивидуума (2.I04). Таким образом, имеем

$$
x_{12} = 0 ; \tag{2.I05}
$$

$$
x_{21} = 0 . \tag{2.I06}
$$

Таким образом, функции полезности каждого из потребителей являются квадратическими функциями двух переменных. В соответствии с постановкой задачи нам также известна производственная функция, связывающая выпуск продукции третьего вида с факторами производства – количеством продуктов первого и второго видов. Пусть эта зависимость имеет вид

$$
f_1(y_{11}\, y_{12}\, y_{13}) = y_{11} y_{12} - a\, y_{13} = 0. \tag{2.I07}
$$

Модель замкнута и совместна с положением равновесия. Она определяет объемы всех произведенных, использованных и обмененных продуктов-факторов производства и предметов потребления, а также величины всей полученной прибыли и рыночных цен (по отношению к цене базисного продукта, принятой за масштаб измерения).

Состояние равновесия можно достичь и поэтапно, рассматривая ряд открытых моделей, описывающих систему. Один из возможных алгоритмов поэтапного достижения равновесия:

а) условия (2.97) и (2.98) выражают индивидуальный спрос через цены и R. Следовательно, совокупный спрос на каждый товар $x_k - \bar{x}_k$ выражается через цены и R. Это относится как к факторам производства, так и к предметам потребления (по нижнему индексу);

б) условия (2.99) и (2.100) выражают продукцию предприятия y_{jk} через цены. Таким образом, совокупное предложение каждого товара y_k также выражается через цены;

в) подстановкой y_{jk} в условие (2.102) величина R выражается через цены;

г) остаются рыночные условия (2.101). Эти условия означают, что на всех рынках и для каждого из товаров (факторов производства и предметов потребления) спрос равен предложению. Таких условий достаточно для определения отношения рыночных цен.

2.7. Пример построения модели равновесия экономической системы

Будем считать, что некоторую экономическую систему образуют два индивидуума и три вида продуктов. Оба индивидуума являются потребителями продуктов системы. При этом второй – только потребитель, первый является еще и предпринимателем, дело которого связано с организацией и ведением производства. С позиции удовлетворения индивидуальных потребностей первый потребитель не предъявляет спроса на второй продукт, второй не предъявляет спроса на первый продукт. Оба имеют начальный запас каждого из этих продуктов – первый имеет запасы первого; второй – запасы второго продукта.

Известно, что функции полезности потребителей имеют одинаковый качественный характер и отражают квадратическую зависимость полезности набора потребляемых продуктов от их количества, отличаясь при этом одна от другой значениями коэффициентов квадратической формы.

Первый индивидуум будучи предпринимателем организует производство

Решением этой системы являются цены

$$p_1 = \frac{1}{|A|}\left(A_{11}K_1 + A_{12}K_2 + A_{13}K_3\right)\omega;$$

$$p_2 = \frac{1}{|A|}\left(A_{21}K_1 + A_{22}K_2 + A_{23}K_3\right)\omega;$$

$$p_3 = \frac{1}{|A|}\left(A_{31}K_1 + A_{32}K_2 + A_{33}K_3\right)\omega.$$

Если ввести издержки на заработную плату на единицу продукции в каждом из производственных процессов

$$\omega_i = K_i\,\omega,$$

то выражения для системы цен

$$p_1 = \frac{1}{|A|}\left(A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{13}\omega_3\right);$$

$$p_2 = \frac{1}{|A|}\left(A_{21}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + A_{23}\omega_3\right);$$

$$p_3 = \frac{1}{|A|}\left(A_{31}\omega_1 + A_{32}\omega_2 + A_{33}\omega_3\right)$$

похожи на выражения для системы товарных выпусков, но как и следует постоянные коэффициенты, связанные с технологической матрицей, транспонированы.

Интересно также отметить сходство формул модели

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

и формул решения для системы товарных выпусков, если записать формулы модели и решения в виде:

$$y_i = x_1 - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3;$$

$$x_i = \frac{A_{1i}}{|A|}y_1 + \frac{A_{2i}}{|A|}y_2 + \frac{A_{3i}}{|A|}y_3,\quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Коэффициенты правой части формул модели – это элементы технологической матрицы A, а коэффициенты правой части формул решения модели – это элементы матрицы B:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix},$$

которая как и должно быть является обратной к матрице A. Элемент $A_{ij}/|A|$ – это товарный выпуск i-го процесса, необходимый для выпуска единицы конечной продукции в j -м технологическом процессе. Важно, что такая оценка справедлива как для величин в натуральных, так и в стоимостных измерениях.

Рассмотрим задачу сравнительной статики, т.е. рассмотрим как изменяются объемы производства в каждом из технологических процессов, если допустить изменение со стороны конечного спроса на продукцию этих процессов. Пусть изменился требуемый объем конечной продукции первого технологического процесса y_1, а объемы конечной продукции y_2 и y_3 остались без изменения. Тогда

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{A_{11}}{|A|}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{A_{12}}{|A|}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial y_1} = \frac{A_{13}}{|A|},$$

т.е. изменение конечного спроса на один вид продукции косвенно влияет и на объемы производства в других процессах. Также изменяются и общие трудозатраты в системе:

$$\frac{\partial Z}{\partial y_1} = K_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + K_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + K_3 \frac{\partial x_3}{\partial y_1} = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{3} K_i A_{1i}.$$

Вместе с тем равновесное значение цены

$$p_j = \frac{W}{|A|} \sum_{i=1}^{3} K_i A_{ij}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial Z}{\partial y_j} = \frac{p_j}{W}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

т.е. цена продукции, деленная на ставку заработной платы, равна приросту занятости на производстве, деленному на прирост конечного спроса на этот продукт со стороны внешних потребителей продукции моделируемого производства.

I.6. Непосредственный расчет коэффициентов полных материальных затрат

Коэффициенты полных материальных затрат b_{ij} непосредственно можно определить по известным коэффициентам прямых затрат a_{ij} на основе учета так называемых косвенных затрат первого, второго и более высоких порядков. Однако, косвенные затраты высоких порядков весьма малы, при непосредственных расчетах ими можно пренебречь. В результате значения полных затрат получаются приближенными.

Для расчета составляется схема учета прямых и косвенных затрат на производстве. Рассмотрим пример.

Пусть одним из видов продукции связи является телефонный ка-

$$\frac{s_{ih}}{p_h} = s_{il} \qquad (h = \overline{1, l-1}; \quad i = \overline{1, n}); \tag{2.97}$$

$$\sum_{h=1}^{l} p_h (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) = \pi_i R \qquad (i = \overline{1, n}); \tag{2.98}$$

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jl}) = 0 \qquad (j = \overline{1, m}); \tag{2.99}$$

$$\frac{f_{jh}}{p_h} = f_{jl} \qquad (j = \overline{1, m}; \quad h = \overline{1, l-1}); \tag{2.100}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jh} = \sum_{i=1}^{n} (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) \qquad (h = \overline{1, l-1}); \tag{2.101}$$

$$\sum_{h=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} p_h y_{jh} = R. \tag{2.102}$$

Это и есть математическая нелинейная статическая модель, переменные которой x_{ih}, y_{jh}, p_h и R.

Общее число переменных:

x_{ih} - спрос i -го индивидуума на h -й товар или ресурс h-го товара у i -го индивидуума после обмена - ln ;

y_{jh} - количество произведенного или потребленного h -го товара j -м предприятием - lm ;

p_h - цена h -го товара (кроме последнего) в условиях равновесия - $l-1$;

R - итог всей прибыли всех предприятий - I;

итого переменных $ln + lm + l - 1 + 1 = l(n+m+1)$.

Число уравнений в системе:

(2.97) - $(l-1)n$;
(2.98) - n ;
(2.99) - $(l-1)m$;
(2.I00) - m ;
(2.I0I) - $l-1$;
(2.I02) - 1 ;
итого

$$ln - n + n + lm - m + m + l - 1 + 1 = l(n+m+1).$$

45

(2.86) и (2.89) описывает общее равновесие, определяемое техническими условиями экономической системы. Условие рыночного равновесия в системе сводится как и прежде к равенству спроса и предложения всех факторов производства и предметом потребления.

Пусть

$$y_k = \sum_{j=1}^{m} y_{jk} . \quad (k = \overline{1,l}). \tag{2.90}$$

Положительное значение y_k означает объем произведенной в системе продукции k -го вида, абсолютная величина отрицательного y_k - чистое потребление фактора k -го вида. Рыночное равновесие будет соблюдено, когда

$$y_k = x_k - \overline{x}_k \tag{2.91}$$

для всех случаев, когда

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \quad \text{и} \quad \overline{x}_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{ik}, \quad (k = \overline{1,l}). \tag{2.92}$$

Итак, имеем

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jk} = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} - \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \quad (k = \overline{1,l}). \tag{2.93}$$

Кроме того, максимальная прибыль всех предприятий должна быть равна R, т.е.

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} p_k y_{jk} = \sum_{j=1}^{m} R_j = R. \tag{2.94}$$

Теперь нужно исключить одно лишнее уравнение. Так как

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} p_k y_{jk} = \sum_{k=1}^{l} p_k \Big(\sum_{j=1}^{m} y_{jk}\Big) = \sum_{k=1}^{l} p_k \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \overline{x}_{ik}) = \tag{2.95}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} p_k (x_{ik} - \overline{x_{ik}}) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R = R \sum_{i=1}^{n} \pi_i = R,$$

то последнее уравнение (2.94) вытекает из остальных и его можно исключить. Однако, уравнение (2.94) в анализе и синтезе моделирования очень полезно. Вместо него как правило исключают одно из уравнений, описывающих рыночные условия равновесия (2.93), например уравнения для последнего l -го товара, т.е. исключаем

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jl} = \sum_{i=1}^{n} x_{il} - \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{il} . \tag{2.96}$$

Вся система теперь будет иметь вид:

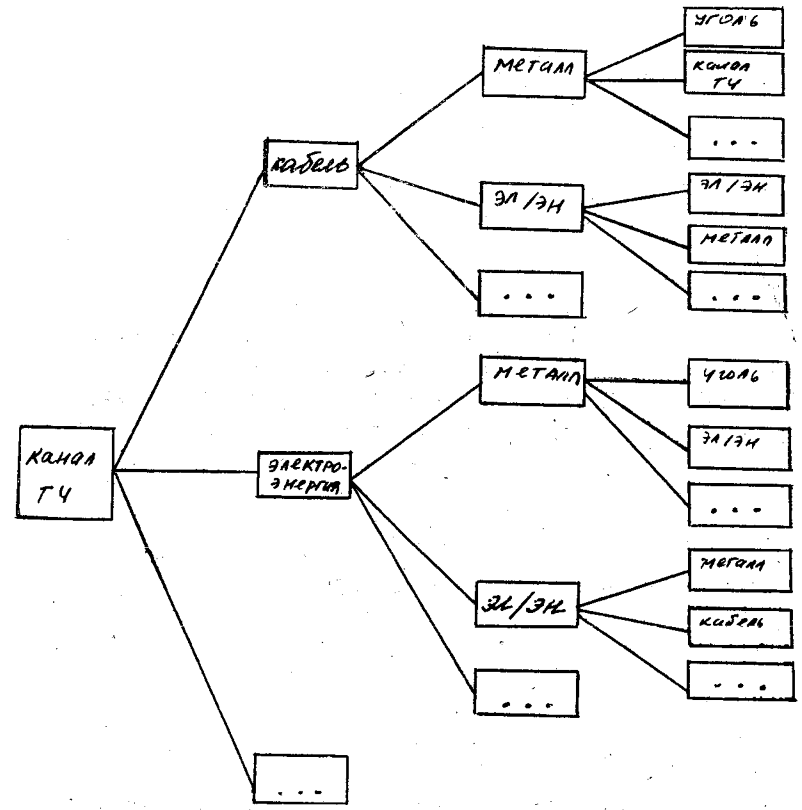

Рис. I.I.

нал, организованный по кабельным линиям связи. Для организации этого канала необходимы кабель, электроэнергия и многое другое, что непосредственно используется при создании и работе канала. Это прямые затраты. Но при производстве кабеля, в свою очередь, необходимы затраты другой продукции - металла, электроэнергии и др. Эти затраты — прямые при производстве металла и косвенные — при производстве канала связи, причем их называют косвенными затратами первого порядка. В свою очередь, для производства металла необходимы те же каналы связи, машины и др. Это прямые затраты при производстве металла, но косвенные при производстве кабеля (причем косвенные первого порядка) и также косвенные при производстве канала связи (их называют косвенными затратами второго порядка. Схематически это изображено на рис. I. Приведенную схему косвенных затрат при организации телефонных каналов можно продолжить и дальше, причем практически она продолжается неограниченно, связи все расширяются и расширяются. Дальше будут косвенные затраты третьего, четвертого и более высоких порядков.

Полные затраты, например, электроэнергии на организацию телефонного канала - это общие ее затраты, т.е. прямые и косвенные, которые надо сложить. Ясно, что косвенные затраты, отнесенные к одному телефонному каналу, будут уменьшаться с ростом их порядка.

Из рассмотренного примера видно, что непосредственные вычисления коэффициентов полных материальных затрат по данным коэффициентов прямых материальных затрат весьма громоздки, поэтому при моделировании сложных экономических систем практически невозможно непосредственно подсчитать коэффициенты полных затрат по известным коэффициентам прямых материальных затрат.

I.7. Примеры для контрольных работ

I. Технологическая матрица производства для случая двух производственных процессов имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу коэффициентов полных материальных затрат.

2. Сформулировать условия равновесия и найти решения модели производства, включающего три производственных процесса с постоянными пропорциями в использовании ресурсов. Заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат a, конечный спрос внешних потребителей продукции каждого из процессов y, вектор трудозатрат K и ставка заработной платы W.

3. Показать, что хотя элементы определителя

$$|\alpha| = |E_n - \alpha|,$$

где

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \quad (i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n}),$$

составленного из стоимостных коэффициентов затрат α_{ij}, зависят от цен, величина этого определителя равна величине определителя

$$|A| = |E_n - a|.$$

4. Показать, что в матрице стоимостных коэффициентов затрат

доход каждого индивидуума будет неизменным, но он зависит от неизвестного параметра R. Теперь система примет вид:

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k \left(x_{ik} - \overline{x}_{ik}\right) = \pi_i R \qquad (i = \overline{1,n}), \qquad (2.84)$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \qquad (2.85)$$

Если i-й индивидуум не является предпринимателем, то для него $\pi_i = 0$.

Предположим далее, что производство ведется m предприятиями, которые обозначаются индексом $j = \overline{1,m}$, причем каждое предприятие работает эффективно при технических условиях, заданных функцией производства

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{j\ell}) = 0. \qquad (2.86)$$

Как и в разд. 2.3 обозначим через y_{jk} объем k-го продукта в j-м предприятии; $y_{jk} > 0$, если это объем k-го произведенного товара; $y_{jk} < 0$, если это объем потребленного фактора k-го вида производства. Возможно $y_{jk} = 0$, когда j-е предприятие не производит и не потребляет продукт k-го вида. Предположим, что f_j имеет непрерывные частные производные:

$$f_{jk} = \frac{\partial f_j(y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{j\ell})}{\partial y_{jk}} \qquad (j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,\ell}). \qquad (2.87)$$

По определению состояние равновесия системы соответствует то, что каждое предприятие организует производство так, чтобы прибыль

$$R_j = \sum_{k=1}^{\ell} p_k y_{jk} \qquad (j = \overline{1,m}) \qquad (2.88)$$

была максимальной, при ограничениях накладываемых функцией производства (2.86) и заданными рыночными ценами. Некоторые слагаемые в R_j положительны ($y_{jk} > 0$), некоторые - отрицательны ($y_{jk} < 0$) условия, когда R_j равно максимуму при ограничениях $f_j = 0$, ($j = \overline{1,m}$) будут иметь вид:

$$\frac{f_{jk}}{p_k} = f_{j\ell} \qquad (j = \overline{1,m}; \quad k = \overline{1,\ell-1}), \qquad (2.89)$$

поскольку, считаем, что $p_\ell = 1$.

Пропорции $f_{j1} : f_{j2} : \ldots f_{j\ell}$ (j дано) представляют предельные нормы замещения ресурсов и выпусков при производственных возможностях, имеющихся у j-го предприятия. Система уравнений ного спроса x_{ih} через цены;

б) условия (2.81), характеризующие техническую сторону производства, выразят спрос на факторы производства $(-y_r)_s$ через величину выпуска продукции y_t;

в) условия (2.82) определяют цены на предметы потребления через цены факторов производства p_r;

г) условия (2.83) распадаются на две подсистемы:

рыночные условия для потребительских товаров, т.е. уравнения для $t = \overline{K+1, \ell-1}$ дают выпуск продукции y_t сначала через цены всех товаров, а затем только через цены факторов производства p_r (так как p_t можно исключить, выразив их через p_r);

рыночные условия для факторов производства, т.е. (2.83) для $r = \overline{1, K}$.

В силу предыдущих зависимостей эти условия представляют уравнения относительно K цен на факторы производства, т.е. относительно p_r. Именно рынок факторов производства связывает воедино все зависимости системы и здесь определяются рыночные цены, отвечающие положению равновесия.

Итак, построена математическая модель статистической экономической системы (2.79) – (2.83), нелинейность которой связана с системой уравнений (2.79), описывающей функции полезности потребителей системы. Обобщим эту модель, включив в нее возможность ведения производства отдельными предприятиями с различными техническими возможностями.

2.6. Модель общего равновесия экономической системы

Снова предположим, что существуют n потребителей с начальными ресурсами $\overline{x}_{ih}$ и спросом x_{ih} на товары $(i = \overline{1,n},\ h = \overline{1,\ell})$. Для них, конечно, справедлива система (2.79). Далее мы предполагаем, что в число потребителей входят и предприниматели-руководители предприятий. В этом случае условие сбалансированности бюджета в форме (2.80) и заключавшееся в равенстве расходов $\sum_{h=1}^{\ell} p_h x_{ih}$ и доходов $\sum_{h=1}^{\ell} p_h \overline{x}_{ih}$, полученных от первоначально имеющихся ресурсов, теперь необходимо изменить.

Предположим теперь, что i-й предприниматель получает заданную фиксированную долю прибыли π_i общей суммы прибыли R от производства. Это означает, что мы считаем, что доход i-го предпринимателя увеличится на величину прибыли $\pi_i R$. Таким образом,

суммирование по горизонтали выполняется в соответствии со следующей формулой

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} V_j = V_i - v_i ,$$

где

$$v_i = p_i y_i , \qquad V_i = p_i x_i , \ \alpha_{ij} = \frac{p_i}{p_j} a_{ij} , \ a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} .$$

5. Технологическая матрица производства из n технологических процессов, элементы которой представлены в стоимостном измерении, имеет вид:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & 1-\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & -\alpha_{nn} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix} .$$

Каким правилом для состояния равновесия следует руководствоваться при суммировании элементов матрицы вдоль столбцов (по строкам)?

6. В производстве используется три вида продуктов трех производственных процессов А, В, С, причем для производства продукции в технологических процессах А и С используется продукция всех трех видов, а продукция технологического процесса В в собственных производственно-эксплуатационных нуждах не используется ($a_{ББ} = 0$). Коэффициенты прямых материальных затрат приведены в табл. I.I.

Таблица I.I

Затрачиваемая продукция \ Выпускаемая продукция	A	B	C
A	0,I	0,2	0,3
B	0,3	0	0,4
C	0,I	0,6	0,2

По этим данным вычислить коэффициент полных затрат продукта процесса В (продукта В) на производство единицы продукта процесса А (продукта А), учитывая косвенные затраты только первых двух порядков.

7. В условиях предыдущей задачи найти коэффициенты полных затрат продуктов А и С при производстве единицы продукта А.

8. В производстве используются четыре вида продуктов: А, В, С, Д, причем для производства каждого продукта используются только три из имеющихся четырех продуктов, а в производстве каждого из этих продуктов сам этот продукт не участвует. Коэффициенты прямых материальных затрат приведены в табл. I.2.

Таблица I.2

Затрачиваемый продукт \ Выпускаемый продукт	А	В	С	Д
А	0	0,I	0,3	0,4
В	0,2	0	0,4	0,I
С	0,5	0,I	0	0,3
Д	0,I	0,6	0,2	0

Вычислить коэффициенты полных затрат продукта В на производство единицы продукта А, учитывая косвенные затраты только первых двух порядков.

9. В условиях задачи 8 вычислить коэффициенты полных затрат:

а) продукта А;

б) продукта С;

в) продукта Д на производство единицы продукта А, учитывая при этом косвенные затраты только первых двух порядков.

I0. В условиях задачи 8 найти коэффициенты полных материальных затрат моделируемого производства как элементы матрицы, обратной к матрице технологических условий производства.

II. Производство разделено на три технологических процесса, в каждом из которых организован выпуск однородной для этого процесса продукции. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат, объемы конечной продукции каждого из процессов и коэффициенты трудозатрат (см. табл. I.3). Известна ставка заработной платы W = = I0 усл. ед.

Таблица I.3

Производящий процесс \ Потребляющий процесс	А	В	С	Конечная продукция
А	0,3	0,25	0,2	56
В	0,I5	0,I2	0,03	20
С	0,I	0,05	0,08	I2
Трудозатраты	0,I8	0,25	0,2	

спрос на продукцию факторов производства есть $(-y_r)$. Спрос потребителей на продукты, полученные в результате расширения производства, равен $(x_t - \overline{x_t})$ для t -го товара, а его предложение равно y_t. Следовательно, условия рыночного равновесия будут одинаковы для факторов производства и предметов потребления

$$y_h = x_h - \overline{x_h} \qquad (h = \overline{1,\ell}). \tag{2.78}$$

Как и в системе (2.25) одно из этих условий можно исключить (например, для $h = \ell$). Итак, моделируемая экономическая система будет описываться следующей математической моделью:

$$\frac{S_{ih}}{p_h} = S_{i\ell} \qquad (i = \overline{1,n}; \quad h = \overline{1,\ell-1}); \tag{2.79}$$

$$\sum_{h=1}^{\ell} p_h (x_{ih} - \overline{x_{ih}}) = 0 \qquad (i = \overline{1,n}); \tag{2.80}$$

$$\sum_{t=k+1}^{\ell} a_{rt} y_t + y_r = 0 \qquad (r = \overline{1,k}); \tag{2.81}$$

$$\sum_{r=1}^{k} p_r a_{rt} - p_t = 0 \qquad (t = \overline{k+1,\ell}); \tag{2.82}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ih} - \overline{x_{ih}}) = y_h \qquad (h = \overline{1,\ell-1}). \tag{2.83}$$

Переменными являются x_{ih}, y_h и p_h.

Общее число переменных равно

$$n\ell + \ell + \ell - 1 = \ell(n+2) - 1.$$

Число уравнений в системе:

(2.79) – $(\ell-1)n$;

(2.80) – n;

(2.8I) – k;

(2.82) – $\ell - k$;

(2.83) – $\ell - 1$;

итого – $\ell(n+2) - 1$.

Таким образом, система замкнута и совместна с положением равновесия.

Алгоритм поэтапного достижения равновесия:

а) условия (2.79) и (2.80) служат для определения индивидуальна услуги факторов производства. Для некоторых продуктов (по индексу r) может быть $x_r < \overline{x}_r$, тогда сведения баланса достигается за счет образования запасов фактора производства. Для других (по индексу t) $x_t > \overline{x}_t$ и дополнительный спрос покрывается расширением производства. Следовательно:

а) рыночное предложение (факторов производства) равно

$$-(x_r - \overline{x}_r) \qquad (r = \overline{1,K}); \qquad (2.73)$$

б) рыночный спрос (продуктов) равен

$$x_t - \overline{x}_t \qquad (t = \overline{K+1,\ell}). \qquad (2.74)$$

И спрос и предложение задаются как функции от цен p_k.

Модель производства – линейная, т.е. считаем, что производство ведется при постоянных технологических коэффициентах. Пусть a_{rt} – затраты r -го фактора на производство единицы t -го продукта. Пусть y_k будет определять k-й продукт в производстве, так что $y_r \leq 0$ для факторов производства ($r = \overline{1,K}$) и $y_t \geq 0$ для предметов потребления $(t = \overline{K+1,\ell})$.

Первое техническое условие производства заключается в том, что при данных технологиях общие затраты какого-либо фактора производства составляют

$$(-y_r) = \sum_{t=K+1}^{\ell} a_{rt}\, y_t\,, \qquad (2.75)$$

следовательно, имеем условие:

$$\sum_{t=K+1}^{\ell} a_{rt}\, y_t + y_r = 0 \qquad (r = \overline{1,K}). \qquad (2.76)$$

Далее мы предполагаем, что все производители, потребители и потоки продуктов образуют замкнутую экономическую систему, так что в условиях равновесия при соответствующих ценах расширение производства обеспечивает в системе в целом равенство выручки и издержек (нулевую прибыль). Здесь рассуждения те же, что и при обсуждении линейной статической модели. Так, для t -го предмета потребления выручка равна $p_t y_t$, а издержки составляют $\sum_{r=1}^{K}(p_r a_{rt})\,y_t$. Следовательно, второе техническое условие производства таково:

$$\sum_{r=1}^{K} p_r a_{rt} - p_t = 0 \qquad (t = \overline{K+1,\ell}). \qquad (2.77)$$

Для полного описания модели исследуемой экономической системы нужно еще добавить рыночные условия спроса и предложения. Предложение факторов производства равно $-(x_r - \overline{x}_r)$, а дополнительный

По этим данным рассчитать плановые объемы продукции, объемы промежуточных продуктов производства, чистую продукцию, равновесные цены на продукцию.

I2. Производство включает четыре технологических процесса, в каждом из которых используются продукты этого производства. В каждом процессе выпускается только один вид продукта. Межпроизводственный баланс этих процессов с указанием коэффициентов прямых материальных затрат, конечной продукции, коэффициентов трудозатрат указаны в табл. I.4. Ставка заработной платы на рынке труда равна I усл. ед. (все цифры в таблице условные).

Таблица I.4

Производящие процессы \ Потребляющие процессы	Коэффициенты прямых затрат				Конечная продукция
	А	В	С	Д	
А	0,2	0,I	0,06	0,2	3I8
В	0,05	0,2	0,04	0,I5	76
С	0,I	0,05	0,04	0,I	67,5
Д	0,2	0,I	0,I	0,05	62
Трудозатраты	0,I5	0,I	0,I5	0,2	

По этим данным найти плановые задания по объемам производства, объемы промежуточных продуктов, общие трудозатраты производства, объемы чистой продукции, цены в состоянии равновесия производственных процессов.

I3. В условиях задачи I2 составить межпроизводственный баланс производства и распределения продукции четырех производственных процессов, заполнив табл. I.5.

I4. В условиях задачи I2 составить стоимостную матрицу условий производства.

I5. Вычислить коэффициенты полных затрат по данным межпроизводственного баланса, приведенного в условии задачи I2. Для решения использовать метод Гаусса.

I6. Используя полученные в предыдущей задаче значения коэффициентов полных затрат и данные задачи I2 о заданиях по объемам конечной продукции, вычислить объемы производства по каждому из технологических процессов.

Таблица I.5

Производящие процессы \ Потребляющие процессы	Объемы производства	Распределение продукции				Конечная продукция
		А	В	С	Д	
А						
В						
С						
Д						
Трудозатраты						
Чистая продукция						
Объемы производства						

2. НЕЛИНЕЙНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.I. Общая характеристика экономической системы и постановка задачи ее моделирования

Экономическая система, модель которой описывается как нелинейная и статическая, включает в себя ℓ товаров (продуктов) n потребителей и m производителей в определенный момент (период) времени. Некоторые из продуктов могут быть использованы как для производства, так и для потребления.

Каждый продукт имеет определенную единицу измерения. Два равных количества одного и того же продукта эквивалентны для каждого производителя и каждого потребителя, а значит эквивалентны для всего сообщества участников в целом.

При построении модели ℓ рынков надо описать набор продуктов (товаров). Будем считать, что набор – это совокупность некоторых количеств каждого из ℓ продуктов, например:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \end{bmatrix}. \tag{2.I}$$

Модель экономической системы должна отражать обмен товарами между участниками (индивидуумами) системы. Модель обмена – это од-

$$\sum_{h=2}^{\ell}\sum_{k=2}^{\ell} g_{jhk}\, y_{jh}^{*}\, y_{jk}^{*}. \tag{2.71}$$

Он не может быть положительным, так как при этом нарушились бы необходимые условия второго порядка.

Математически можно строго решить и обратную задачу и показать, что предельные условия (2.63) являются достаточными условиями существования равновесия предприятия в предположении выпуклости множества технологически возможных выпусков продукции.

2.5. Модель равновесия в сфере обмена, потребления и простого производства с постоянными пропорциями в использовании ресурсов

Построим экономико-математическую модель равновесия экономической системы с учетом как потребления и обмена, так и производства, однако, будем считать, что производство описывается линейной статической моделью.

По-прежнему предполагаем, что имеется n потребителей и ℓ товаров. Условия индивидуального спроса определены системами (2.26) и (2.27). Кроме того, теперь считаем, что помимо обмена на рынке появляется в результате производства, на основе переработки ресурсов $\overline{x_{ih}}$, дополнительные предложения. Для простоты не рассматриваем промежуточные продукты, а также те, которые одновременно являются как предметами потребления, так и средствами производства (т.е. выполняются условия линейной статической модели производства). Тогда совокупность ℓ продуктов распадается на две не пересекающиеся группы:

а) K факторов производства ($r = 1, 2, \ldots, K$) и ($\ell - K$) предметов потребления ($t = K+1, \ldots, \ell$). Нижний индекс h применяется ко всей группе ℓ товаров. Когда же две группы товаров рассматриваются отдельно, индекс r охватывает K факторов, а индекс t ($\ell - K$) предметов потребления. Как и прежде

$$x_h = \sum_{i=1}^{n} x_{ih} \quad \text{и} \quad \overline{x_h} = \sum_{i=1}^{h} x_{ih} \quad \left(h = \overline{1,\ell}\right). \tag{2.72}$$

выражают спрос и предложения h -го товара на рынке. Тогда $\overline{x_h}$ служит либо для обмена $h = t$, либо для потребления в качестве фактора производства ($h = r$), а значит x_h будет представлять либо объем спроса на предметы потребления (полученные в результате обмена или расширения производства), либо "резервированный" спрос

$$p_1 = \lambda_j\,, \quad p_k = -\lambda_j\, g_{jk}\,, \quad k \neq 1, \qquad (2.66)$$

откуда

$$-g_{jk} = \frac{p_k}{p_1} \quad (k = \overline{2,l}\,). \qquad (2.67)$$

Предельная продуктивность или эффективность продукта должна равняться отношению цены этого продукта к цене выпускаемой на предприятии продукции.

Необходимые условия второго порядка, выполняющиеся в состоянии равновесия при использовании общей формы представления производственной функции (2.62) означают, что

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{\kappa=1}^{l} f_{jk\kappa}\, dy_{jk}\, dy_{j\kappa} \geq 0 \qquad (2.68)$$

для любых dy_{jk} таких, что

$$\sum_{k=1}^{l} f_{jk}\, dy_{jk} = 0, \qquad (2.69)$$

где $f_{jk\kappa}$ – значение второй производной функции f_j по y_{jk} и $y_{j\kappa}$ в точке y_j^*.

Для частного случая производственной функции (2.65) условия второго порядка влекут за собой

$$\sum_{k=2}^{l} \sum_{\kappa=2}^{l} g_{jk\kappa}\, dy_{jk}\, dy_{j\kappa} \leq 0 \qquad (2.70)$$

для любых dy_{jk}, $k = \overline{2,l}$.

Мы приходим, таким образом, к предположению невозрастания предельной выработки, предположение, которое выполняется для предприятия в окрестности равновесия. Это означает, что предприятие не может находиться в конкурентном равновесии в состоянии, в окрестности которого удельный выпуск продукции возрастает. Подтвердим это на частном примере производственной функции в форме (2.65). Пусть предприятие находится в состоянии равновесия и предположим, что в точке y_j^* ресурсы получили приращение $y_{12}^* d\alpha, \ldots, y_{jl}^* d\alpha$. Величина dy_{j1} – приращение, которое получил при этом выпуск продукции. Говорят, что эффект от изменения масштаба возрастает в окрестности y_j^*, если $\frac{dy_{j1}}{d\alpha}$ – возрастающая функция $d\alpha$. Однако, если мы рассмотрим ограниченное приращение выпуска dy_{j1} и разложим функцию (2.65) в ряд по $d\alpha$ с удержанием первых трех членов разложения, то увидим, что множитель, состоящий перед $d\alpha$ в выражении $dy_{j1}/d\alpha$ равен

на из основных составных частей, входящих в более общую модель рыночного равновесия. При построении модели обмена считаем, что каждому товару соответствует цена, которая является положительным числом. Обозначим цену продукта k через p_k. Совокупности продуктов можно поставить в соответствие вектор-строку цен

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_l). \qquad (2.2)$$

По определению стоимости набора товаров есть величина, равная скалярному произведению векторов p и x, т.е.

$$px = \sum_{k=1}^{l} p_k x_k\,. \qquad (2.3)$$

Считается, что два набора, имеющие одинаковую стоимость, могут быть обменены друг на друга. Например, набор $x^{(1)}$ и набор $x^{(2)}$ могут быть обменены друг на друга, если

$$p x^{(1)} = p x^{(2)}. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим пример. Пусть даны два набора:

$$x^{(1)} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0);$$
$$x^{(2)} = (0, 0, \ldots, \qquad 0, x),$$

где компонента I в наборе $x^{(1)}$ находится на k-м месте. По определению эти наборы могут быть обменены друг на друга, если

$$p_k = p_l\, x\,,$$

следовательно, отношение p_k к p_l определяет количество товара l, которое надо отдать, чтобы получить в обмен единицу товара k. Таким образом, в модели экономической системы существенны лишь отношения между стоимостями различных наборов, а значит мы будем определять лишь структуру цен, т.е. вектор цен p в исследуемой системе будет определен лишь с точностью до постоянного множителя. Раскрыть указанную неопределенность возможно, если потребовать, чтобы вектор цен удовлетворял некоторым заданным условиям. Так, например, можно положить цену единицы определенного товара равной I, тогда эта единица товара называется единицей счета.

Для построения модели деятельности потребителя обозначим его место в системе целочисленной переменной $i\ (i = \overline{1,n})$. Поведение потребителя определим набором

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{il} \end{pmatrix} \qquad (i = \overline{1,n}\,), \qquad (2.5)$$

компоненты которого x_{ih} $(h = \overline{1,\ell})$ соответствуют количеству различных потребляемых продуктов. Значения x_{ih} не обязательно положительны. Например, если потребитель i выполняет работу определенного вида, то эту работу можно представить в модели как отрицательное потребление i -м потребителем результатов выполняемой им работы.

Место производителя в системе обозначим в модели буквой j ($j = \overline{1,m}$). Производитель j преобразует некоторые продукты, которые называют ресурсами, факторами производства или затратами предприятия j в другие продукты, называемые выпускаемой продукцией или просто выпусками:

$$y_j = \begin{bmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ \vdots \\ y_{j\ell} \end{bmatrix} \qquad (j = \overline{1,m}). \tag{2.6}$$

Нелинейная статическая модель исследуемой экономической системы должна учитывать наличие начальных запасов продуктов (товаров) в системе. Понятие начальных запасов, формализуемых в модели, также обладает определенной гибкостью. Так, можно использовать два представления для работы, выполняемой отдельными участниками, из которых состоит система. Можно, как отмечалось, работу рассматривать как отрицательное потребление. Можно также рассматривать ее как ресурс, которым располагает система. Тогда, если h обозначает работу определенного вида, то x_{ih} равно нулю, а $\bar{x}_h$ представляет собой общую величину работы соответствующего вида, выполнение которой обеспечивается участниками системы.

На основе вводимых таким образом переменных и параметров можно описать все возможные состояния системы в определенный момент или период времени. Из этих состояний выделяют состояние равновесия экономической системы, причем модель должна описать экономическую систему именно в этом состоянии. Такая модель и называется моделью общего равновесия экономической системы, известная в литературе как модель Вальраса. Цель такой модели объяснить, как устанавливаются цены, по которым товары обмениваются на рынках, а также понять главные составные части системы, которые в рыночной экономике характеризуют производство, распределение и потребление.

При построении модели общего равновесия будем считать, что в системе действуют условия совершенной (чистой) конкуренции. Предположим, что условия носят статический характер, т.е. справедливы для определенного периода времени.

Предельная выработка по ресурсу h - величина $\frac{\partial g_j}{\partial(-y_{jh})} = -g_{jh}$, называемая предельной эффективностью или продуктивностью ресурса h, является, таким образом, убывающей функцией количества продукции h, которое является фактором производства.

Теперь, после того как сформулированы основные предположения, положенные в основу представления множества технологических ограничений в виде производственной функции, мы можем определить равновесие предприятия, исходя из требования максимизации прибыли в этом состоянии и наличия совершенной конкуренции.

Прибыль на j -м предприятии может быть определена как

$$R_j = p y_j = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_{jh} \qquad (j = \overline{1,m}). \tag{2.61}$$

При этом значения y_{jh}, соответствующие выпуску продукции на этом предприятии, положительны; затратам ресурсов - отрицательны.

В условиях эффективной организации производства

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{j\ell}) = 0. \tag{2.62}$$

Максимизация (2.61) при ограничении (2.62) представляет собой классическую задачу на условный оптимум. В принятых нами предположениях относительно множества чистых выпусков производства решение этой модели существует. Пусть y_j^* - ее решение, тогда необходимые условия первого порядка влекут за собой существования множителя Лагранжа λ_j такого, что

$$p_h = \lambda_j f_{jh} \qquad (h = \overline{1,\ell}), \tag{2.63}$$

где f_{jh} - значение, принимаемое в точке y_j^* производной f_j по y_{jh}.

Поскольку предельные продуктивности факторов производства и цены неотрицательны и более того одновременно все не отрицаются в нуль следует, что число λ_j положительно.

Из условий (2.63) следует

$$\frac{f_{js}}{f_{jr}} = \frac{p_s}{p_r}. \tag{2.64}$$

Таким образом, получаем, что в состоянии равновесия предельная норма замещения между r и s равна отношению их цен. В частности, если производственная функция представлена в виде

$$y_{j1} = g(y_{j2}, y_{j3}, \dots, y_{j\ell}), \tag{2.65}$$

условия (2.64) превратятся в

45

Если α – число, заключенное между 0 и I, то вектор $y_j^o + \alpha dy_j$ представляет возможный выпуск чистой продукции, он, следовательно, удовлетворяет условию:

$$y_{j1}^o + \alpha dy_j \leq g_j (y_{j2} + \alpha dy_{j2}, \dots, y_{je}^o + \alpha dy_{je}). \quad (2.54)$$

Пусть вторые производные функции g_j непрерывны. Разложив в ряд правые части выражений (2.52) и (2.53), ограничиваясь членами второго порядка и принимая во внимание равенство (2.52), получим, с одной стороны:

$$dy_{j1} = \sum_{h=2}^{\ell} g_{jh}\, dy_{jh} + \frac{1+\varepsilon}{2} \sum_{h=2}^{\ell} \sum_{\kappa=2}^{\ell} g_{jh\kappa}\, dy_{jh}\, dy_{j\kappa} \quad (2.55)$$

и, с другой стороны:

$$\alpha\, dy_{j1} \leq \alpha \sum_{h=2}^{\ell} g_{jh}\, dy_{jh} + \frac{\alpha^2(1+\gamma)}{2} \sum_{h=2}^{\ell} \sum_{\kappa=2}^{\ell} g_{jh\kappa}\, dy_{jh}\, dy_{j\kappa}, \quad (2.56)$$

где g_{jh} – значение в точке y_j^o, которое принимает первая производная функции g_j по y_{jh}; $g_{jh\kappa}$ – значение в точке y_j^o второй производной g_j по y_{jh} и $y_{j\kappa}$, величины ε и γ стремятся к нулю при $dy_{j\kappa}$, стремящемся к нулю.

Вычитая равенство (2.55), умноженное на α; из неравенства (2.56) и принимая во внимание, что α заключено между 0 и I, получим, что

$$\sum_{h=2}^{\ell} \sum_{\kappa=2}^{\ell} g_{jh\kappa}\, dy_{jh}\, dy_{j\kappa} \leq 0, \quad (2.57)$$

поскольку множитель $\alpha(\alpha + 1 + \alpha n - \varepsilon) < 0$, если dy_{jh} достаточно малы, а так как dy_{jh} могут быть выбраны произвольно, то из выпуклости следует, что матрица

$$G_{jh\kappa} = [g_{jh\kappa}] \quad (2.58)$$

вторых производных отрицательно полуопределена.

Обратно, если матрица $G_{jh\kappa}$ отрицательно определена, то для любого заданного набора факторов y_j выполняется предположение выпуклости. Условие (2.57) и представляет собой общую форму гипотезы, известной под названием невозрастания предельной выработки, так как, в частности, имеем при $h = \kappa$

$$g_{jhh} \leq 0 \quad (h = \overline{2, \ell}) \quad (2.59)$$

или иначе

$$\frac{\partial(-g_{jh})}{\partial(-y_{jh})} \leq 0 \quad (h = \overline{2, \ell}). \quad (2.60)$$

Известно, что совершенная конкуренция имеет место в системе, если цена каждого товара едина для всех участников и любых операций, если каждый участник рассматривает эти цены независимыми от его собственных решений, и если он может приобрести или продать по этим ценам любое количество товаров, определяемое в соответствии с имеющимися у него возможностями.

Состояние равновесия моделируемой экономической системы означает равенство совокупных спроса и предложения в системе и отвечает согласию между всеми ее участниками в том смысле, что каждый из производителей-предпринимателей получает максимальную прибыль, а потребитель максимальную полезность. При этом, конечно, должны быть учтены действующие ограничения со стороны имеющихся у них возможностей. В частности, индивидуальный спрос потребителя в состоянии равновесия должен определиться рыночными ценами на продукты спроса, оценкой полезности для потребителя того или иного набора продуктов (функцией полезности) и начальными запасами продуктов, имеющихся у него.

Предложение производителя также определяется начальными возможностями, ценами и производственными условиями (производственной функцией). Экономико-математическая модель такого состояния системы в общем случае является нелинейной, статической моделью, поскольку и производственные функции и функции полезности, описывающие существенные взаимосвязи моделируемой системы, нелинейны.

Построение экономико-математической модели общего равновесия целесообразно провести в три этапа:

I) построение модели равновесия в сфере обмена и потребления;

2) построение модели равновесия в сферах обмена и потребления и производства с постоянными пропорциями в использовании факторов производства;

3) построение модели общего рыночного равновесия. В этом случае в отличие от второго этапа организация производства предполагает получение прибыли для предпринимателей, а производственные функции, описывающие связи затрат и выпуска, являются нелинейными.

2.2. Экономико-математическая модель равновесия в сфере обмена и потребления

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n потребителей, и обозначим потребление i-го участника через x_{ih}. Пусть $\overline{x}_{ih}$ – известное начальное количество продукта h-го вида у i-го потребителя.

Введем в модель цены: p_k - цена товара k, и для определенности примем, что цена товара ℓ-го вида $p_\ell = 1$. Этих переменных и параметров достаточно для описания деятельности каждого из потребителей в моделируемой системе. Общее число переменных в модели складывается из ℓn переменных, описывающих потребление x_{ik} $(i=\overline{1,n}\ ,\ k=\overline{1,\ell})$ и $(\ell-1)$ переменных для описания цен товаров p_k $(k=\overline{1,\ell-1})$. Таким образом, общее число переменных равно

$$\ell n + \ell - 1 = \ell(n+1) - 1.$$

С использованием этих переменных математически опишем существенные связи исследуемой системы потребления и обмена. При этом действующие в системе существенные условия-ограничения разобьем на две группы. Первая группа условий отражает в модели условия полезности продуктов для потребителей, вторая - отражает условия формирования цен на продукты потребления в состоянии равновесия.

Опишем первую группу условий. Каждый потребитель приобретает или продает, а в целом осуществляет обмен так, чтобы обеспечить себе наибольшую полезность в пределах имеющихся у него возможностей. При этом цены считаем заданными.

Возможности каждого потребителя i описываются экономическим ограничением, которое в общем случае (при всех возможных состояниях системы) задается неравенством

$$p x_i \leqslant D_i \qquad (i=\overline{1,n}), \tag{2.7}$$

где D_i - доход i-го потребителя; x_i - вектор-столбец, определяемый по (2.5).

Полезность набора продуктов для потребителя описывается так называемой функцией полезности. Функция полезности - центральное понятие в теории полезности, разработанной почти одновременно тремя экономистами С.Джевонсом (1871 г.), К.Менгером (1871 г.) и Л.Вальрасом (1874 г.). Теория полезности по своей природе основана на логике. Она может быть применена независимо от мотивов, заставляющих потребителей осуществлять выбор, поскольку при моделировании экономической системы функция полезности $S_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i\ell})$ $(i=\overline{1,n})$ для каждого потребителя рассматривается как заданная. Вместе с тем отметим, что при построении функции полезности исходят из естественных предпосылок, сводящихся к следующим:

потребитель приобретает требуемый ему товар только в том случае, если его цена ниже потребительной стоимости;

$$\alpha y_j^{(1)} + (1-\alpha)\, y_j^{(2)} \in Y_j. \tag{2.49}$$

Рис. 2.2 соответствуют сечению выпуклого множества Y_j в E^4. Точно также множества на рис. 2.3 удовлетворяют предположению выпуклости. На рис. 2.6 представлены три ситуации для случая одного вида ресурса и одного вида выпускаемой продукции. Множество продукции, ограниченное Γ_1, соответствует постоянной выработке, ограниченное Γ_2 - убывающей выработке, ограниченное Γ_3 - возрастающей выработке (очевидно, наперед заданная функция может не входить ни в одну из этих трех категорий). Множество, ограниченное Γ_3, не является выпуклым, а два остальных являются выпуклыми.

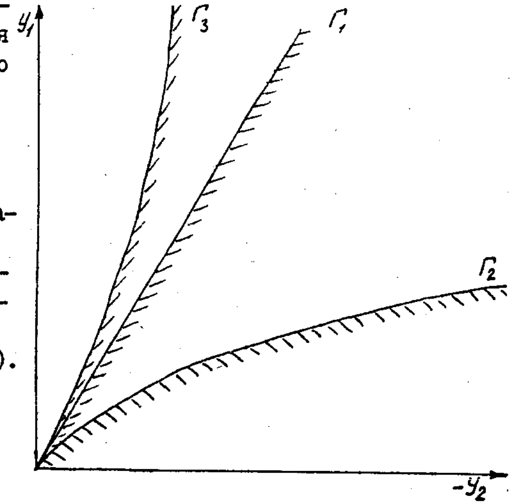

Рис. 2.6

Модель производства, построенная в предположении справедливости гипотезы выпуклости, порождает условие невозрастания предельной выработки.

Если производственная функция задана в форме

$$y_{j1} = g_j(y_{j2}, \dots, y_{j\ell}), \tag{2.50}$$

то условие невозрастания предельной выработки означает, что

$$g_{jkk} = \frac{\partial^2 g_j}{\partial y_{jk}^2} \leqslant 0 \qquad (k=\overline{2,\ell}). \tag{2.51}$$

Покажем это. Пусть производственная функция задана в форме (2.50). Рассмотрим два близких технологически эффективных вектора y_j° и $y_j^\circ + dy_j$, удовлетворяющих равенству (2.38), т.е.

$$y_{j1}^\circ = g_j(y_{j2}^\circ, \dots, y_{j\ell}^\circ); \tag{2.52}$$

$$y_{j1}^\circ + dy_{j1} = g_j(y_{j2}^\circ + dy_{j2}, \dots, y_{j\ell}^\circ + dy_{j\ell}). \tag{2.53}$$

ми совершенной конкуренции каждое отдельное предприятие достаточно мало по сравнению с рынком, так что его действия никак не сказываются на ценах. Более того, предполагается, что спрос и предложения других участников экономической системы абсолютно гибки, т.е. что они немедленно реагируют на любое предложение или любой спрос рассматриваемого предприятия. Другими словами, предприятие находится в условиях совершенной конкуренции, если цена каждого продукта определена экзогенно для каждого предприятия и, следовательно, не зависит от производственных решений производителя и если по данной системе цен предприятие может приобрести все необходимое количество ресурсов и сбыть всю производимую им продукцию.

Будем также считать, что в экономической системе в целом производство осуществляется относительно большим числом производственных единиц, функционирующих в сходных условиях, а технология отдельного предприятия удовлетворяет предположению постоянства удельного выпуска. Математически эти предположения позволяют считать, что в отношении множества чистых выпусков продукции, определяющих в свою очередь прибыль экономической системы в целом, справедливы гипотезы аддитивности и делимости.

Гипотеза аддитивности заключается в том, что если векторы $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ определяют возможный выпуск чистой продукции, то вектор $y_j = y_j^{(1)} + y_j^{(2)}$ также определяет возможный выпуск чистой продукции, т.е.

$$y_j \in Y_j \qquad \text{или} \qquad f_j(y_j) \leq 0. \tag{2.47}$$

Гипотеза делимости заключается в том, что, если вектор $y_j^{(1)}$ определяет возможный выпуск чистой продукции, то вектор $\alpha y_j^{(1)}$, где $0 \leq \alpha \leq 1$ также определяет возможный вектор чистой продукции, т.е.

$$\alpha y_j^{(1)} \in Y_j \qquad \text{или} \qquad f_j(\alpha y_j^{(1)}) \leq 0. \tag{2.48}$$

В общем случае, это гипотеза не выполняется, поскольку для всякого производства существует порог, ниже которого оно не может осуществляться в тех же условиях. Тем не менее для моделирования достаточно широкого класса промышленных производств подобной неделимостью можно пренебречь.

Делимость и аддитивность множества чистых выпусков производства влекут за собой выпуклость множества Y, т.е., если векторы $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ определяют два возможных выпуска чистой продукции и если $0 \leq \alpha \leq 1$, то вектор

с точки зрения общества не выгодно предоставлять потребителю продукт, если издержки его производства выше его полезности в одном и том же измерении;

полезность определенного количества продукта зависит от количества этого продукта, которое уже имеется у потребителя.

Функция полезности

$$S_i(x_i) = S_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il}) \quad (i = \overline{1,n}) \tag{2.8}$$

представляет систему предпочтений потребителя. Основным ее свойством является то, что i-й потребитель предпочитает выбирать $x_i^{(1)}$, а не $x_i^{(2)}$, если

$$S_i(x_i^{(1)}) > S_i(x_i^{(2)}). \tag{2.9}$$

Таким образом, функция S служит для упорядочения наборов по предпочтению их друг другу. Принято считать, что этот порядок определяет, в какой мере различные наборы продуктов удовлетворяют нуждам потребителя.

Важной характеристикой функции полезности являются так называемые поверхности безразличия. Поверхность безразличия соответствует определенному набору продуктов x^0 и состоит из таких векторов-наборов x, для которых выполняется равенство

$$S(x) = S(x^0). \tag{2.10}$$

Следовательно, существует столько поверхностей безразличия, сколько значений принимает функция S. Два набора $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ принадлежат одной поверхности безразличия, если потребителю безразлично какой из наборов $x^{(1)}$ или $x^{(2)}$ выбрать.

При введении функции полезности в экономико-математическую модель обмена и потребления будем считать, что эта функция определена на множестве допустимых наборов X, является непрерывной и возрастающей функцией в том смысле, что если $x_k^{(1)} > x_k^{(2)}$ для $k = \overline{1,l}$, то $S(x^{(1)}) > S(x^{(2)})$. Кроме того, будем также считать, что функция S имеет производные первого и второго порядков, а ее первые производные не могут быть все одновременно равны нулю. Часто предполагается также, что функция $S(x)$ – вогнутая функция в том смысле, что если $S(x^{(2)}) \geq S(x^{(1)})$ для двух разных наборов, то

$$S(x) > S(x^{(1)}) \tag{2.11}$$

для всех наборов x в интервале $(x^{(1)}, x^{(2)})$, т.е. для всех x, определяемых соотношениями

$$x_h = \alpha x_h^{(1)} + (1-\alpha) x_h^{(2)} \qquad (h = \overline{1,l}). \qquad (2.12)$$

Условие (2.12) означает, что поверхности безразличия обращены вогнутостью вверх (рис. 2.1). Это условие можно рассматривать как допущение того, что набор x , промежуточный по отношению к наборам $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, лучше сбалансирован, нежели $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Функция полезности потребителя определяется на множестве векторов-наборов продуктов. Обозначим это множество через X . При построении модели потребление будем считать, что это множество выпукло, замкнуто и ограничено снизу.

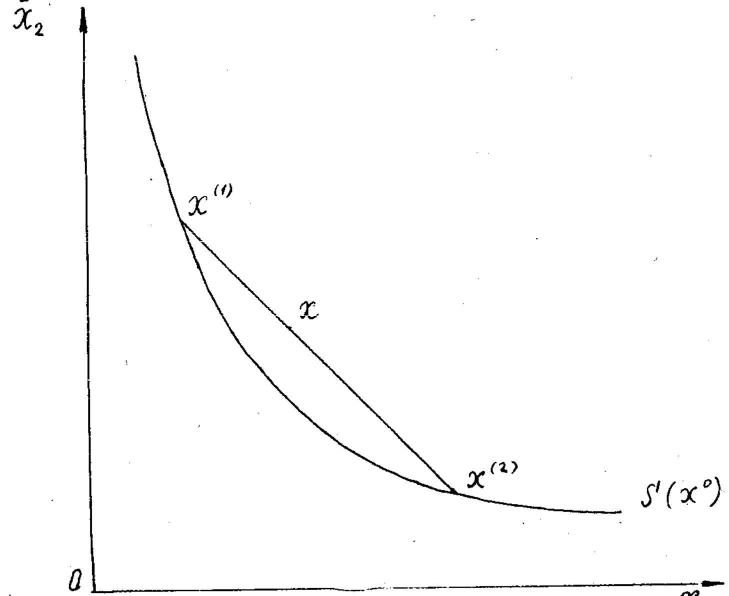

Рис. 2.1

Известно, что множество X выпукло, если вместе с векторами $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ оно содержит любой вектор, лежащий на отрезке ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$). Это предположение не выполняется, если в исследуемой экономической системе потребление продуктов может быть только в целых количествах. Однако, такая ситуация при моделировании с использованием выпуклого множества наборов является не слишком ограниченным, если мы рассматриваем достаточно большие количества продуктов, так что в этом случае замена реального множества целочисленных наборов

то же количество продукции, применяя одновременно обе технологии, но сократив масштаб производства по каждой из них, наполовину по сравнению с представленными точками А и В. Точка, соответствующая такому способу производства, будет лежать на середине отрезка АВ, изображенного на рис. 2.5. Точно также каждая точка этого отрезка соответствует всевозможным комбинациям между этими двумя технологиями, в результате которых будет получено одно и то же количество выпускаемой продукции.

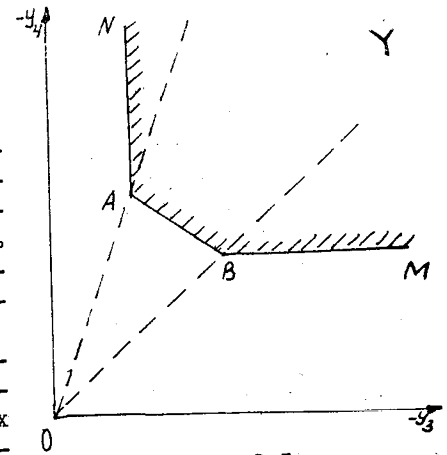

Рис. 2.5

В этом случае первые производные производственной функции непрерывны во всех внутренних точках отрезка АВ, но не в точках А и В. Чтобы формально описать ситуации, подобные изображенным на рис. 2.4 и 2.5, мы, характеризуя множество технологически эффективных векторов, должны добавить к уравнению $f_j(y_j) = 0$ другие ограничения. Так, например, если между затратами ресурсов в возможных объемах $(-y_{j3})$ и $(-y_{j4})$ существует фиксированная пропорция, как это изображено на рис. 2.4, мы должны записать:

$$y_{j4} = \alpha \cdot y_{j3}.$$

В случае существования двух технологий, как это показано на рис. 2.5, дополнительные ограничения должны быть записаны в виде

$$-\beta y_{j3} \leq -y_{j4} \leq -\alpha y_{j3}.$$

2.4. Модель равновесия предприятия в условиях совершенной конкуренции

Моделируя поведение потребителя в окрестности равновесия, мы показали, что выбор наилучшего набора потребляемых продуктов сводится к максимизации функции полезности. Подобно этому производитель стремится максимально увеличить прибыль в условиях технологических ограничений. Предполагается, что в соответствии с условияственных операциях ресурсы используются в строго определенных пропорциях. В экономико-математических моделях таких производств, скажем, в условиях описанного выше примера с использованием четырех видов продуктов, изокванты не могут иметь ту же форму, что и на рис. 2.3. Если существует возможность свободного использования избытков, изокванты такого производства и соответствующее множество Y представлено на рис. 2.4. Как видим при эффективной организации производства, даже при избытке того или другого ресурса их объемы $(-y_{j3})$ и $(-y_{j4})$ должны принимать значения, отношение которых соответствует отношению, определяемому полупрямой OA. Полупрямые AN и AM, за исключением точки A, представляют собой производства, которые не являются технологически эффективными.

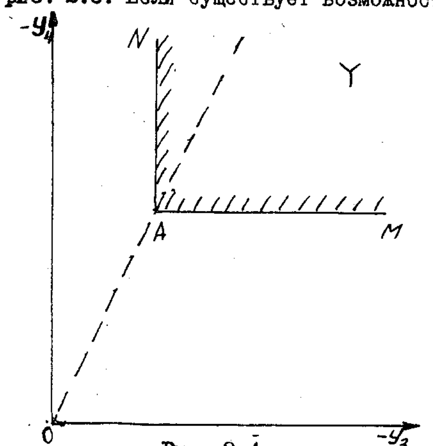

Рис. 2.4

Аналитически j-е производство, соответствующее изокванте, изображенной на рис. 2.4 в случае однородного выпуска $(y_{j1} = y_{j2})$ описывается производственной функцией

$$y_{j1} = \min \left\{ -\frac{y_{j3}}{a_3}, -\frac{y_{j4}}{a_4} \right\}, \qquad (2.46)$$

где a_3 и a_4 – некоторые заданные положительные константы.

Эта функция не имеет производной первого порядка во всех точках y_j^0, для которых выполняется равенство

$$\frac{y_{j3}^0}{a_3} = \frac{y_{j4}^0}{a_4}.$$

В действительности этот эффект, однако, бывает не так ярко выражен, как изображено на рис. 2.4. Предприятие может иметь в распоряжении две или несколько технологий производства, каждая из которых характеризуется своими различными фиксированными пропорциями затрат ресурсов. На рис. 2.5 изображены случаи применения двух технологий, представленных точками A и B. Предприятие может одновременно использовать оба технологических способа для изготовления того же количества выпускаемой продукции. Например, можно получить

выпуклым множеством рассматривается как приемлемое приближение.

Замкнутость множества X также является достаточно естественным предположением при моделировании реальных экономических систем. Замкнутость множества векторов-наборов продуктов означает, что если каждый вектор $x^{(t)}$, принадлежащий бесконечной сходящейся последовательности векторов (t = I, 2, ...), представляет собой физически возможный набор потребляемых продуктов, то вектор $\bar{x}$, являющийся пределом последовательности $\{x^{(t)}\}$, представляет собой также возможный набор продуктов.

Тот факт, что X ограничено снизу, означает, что существует набор $\underline{x}$ такой, что

$$x_h \geq \underline{x}_h \quad \text{для} \quad h = \overline{1,l} \quad \text{и} \quad \partial\, x \in X. \qquad (2.I3)$$

Это условие также естественно и выполняется всегда, когда количество труда, предоставляемого потребителем, ограничено сверху и потребление других продуктов не может быть отрицательным.

Рассмотренные ограничения в отношении допустимых векторов-наборов продуктов можно определить как физические ограничения, действующие в системе, и описанные таким образом в математической модели.

В целом же при построении модели равновесия в сфере потребления и обмена, если допустить, что в реальной системе справедливы указанные выше физические и экономические ограничения, функция полезности задана и обладает перечисленными свойствами, то можно строго доказать, что в системе существует оптимальный набор продуктов i-го потребителя x_i^*, максимизирующий функцию полезности s_i на множестве допустимых наборов продуктов X. Этот набор таков, что для i-го потребителя

$$p x_i^* = D_i \qquad (i = \overline{1,n}). \qquad (2.I4)$$

Таким образом, при нахождении оптимального набора продуктов, потребляемого i-м потребителем, требуется решить следующую задачу. Найти x_i^*, на котором

$$s_i (x_i^*) = \max_{x_i} s_i (x_i) \qquad (2.I5)$$

при условии, что

$$p x_i = D_i \qquad (i = \overline{1,n}). \qquad (2.I6)$$

Это классическая задача условной оптимизации. Для ее решения можно использовать метод множителей Лагранжа. Составляется лагранжиан модели

$$L(x_i\lambda_i) = S_i(x_i) - \lambda_i(\rho x_i - D_i) \quad (i = \overline{1,n}). \tag{2.17}$$

Поскольку при введенных предположениях условия существования максимума в модели (2.15), (2.16) выполнены, то при оптимальном наборе первые производные функции Лагранжа $L_i(x_i\lambda_i)$ по x_{ih} должны обратиться в ноль в точке x_i^*, т.е.

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_{ih}} - \lambda_i p_h = 0 \qquad (h = \overline{1,\ell}). \tag{2.18}$$

Величину $\partial S_i/\partial x_{ih}$ называют предельной полезностью продукта h для i-го потребителя. Эта величина показывает предельное изменение функции полезности i-го потребителя при малом изменении количества продукта h и при фиксированных количествах других продуктов, входящих в набор.

Обозначают предельную полезность как

$$S_{ih} = \frac{\partial S_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i\ell})}{\partial x_{ih}} \quad (i = \overline{1,n};\ h = \overline{1,\ell}) \tag{2.19}$$

В этих обозначениях, в частности, для K-го и r-го продуктов имеем

$$S_{iK} - \lambda_i p_K = 0; \quad S_{ir} - \lambda_i p_r = 0 \tag{2.20}$$

или

$$\frac{S_{iK}}{S_{ir}} = \frac{p_K}{p_r}, \tag{2.21}$$

т.е. предельные полезности пропорциональны ценам. Если теперь воспользоваться условием, что $p_\ell = 1$, то для h-го и ℓ-го продуктов получим

$$\frac{S_{ih}}{p_h} = \lambda_i, \qquad S_{i\ell} = \lambda_i$$

или

$$\frac{S_{ih}}{p_h} = S_{i\ell} \qquad (i = \overline{1,n};\ h = \overline{1,\ell-1}). \tag{2.22}$$

Система уравнений (2.22) и описывает нам условия полезности продуктов для потребителей в состоянии равновесия экономической системы в сфере обмена и потребления. При этом индивидуальное потребление x_{ih}^* для каждого потребителя по каждому продукту будем обеспечивать максимальную полезность каждому потребителю. Значения x_{ih}^* будут определены через значения цен p_h^*, соответствующих состоянию равновесия. Но прежде чем дать правило их определения остано-

где f_{jh} – значение в точке y_j^0, производной f_j по y_{jh}.

Если все dy_{jh} кроме двух: dy_{jr} и dy_{js} равны нулю, уравнение (2.41) примет вид

$$f_{jr}\, dy_{jr} + f_{js}\, dy_{js} = 0 \tag{2.42}$$

или

$$-\frac{dy_{jr}}{dy_{js}} = \frac{f_{js}}{f_{jr}}. \tag{2.43}$$

Это выражение аналогично тому, которое было получено при построении модели равновесия в сфере обмена и потребления, а значит отношение, стоящее в кривой части этого равенства, можно назвать предельной нормой замещения между продуктами s и r для рассматриваемого j-го производителя.

В частности, если производственная функция представлена в форме (2.38), уравнения (2.43) запишутся следующим образом:

$$-\frac{dy_{j1}}{dy_{js}} = -g_{js}, \qquad s \neq 1; \tag{2.44}$$

$$-\frac{dy_{jr}}{dy_{js}} = \frac{g_{js}}{g_{jr}}, \qquad s, r \neq 1. \tag{2.45}$$

Соотношение (2.44) определяет увеличение выпуска продукции в результате увеличения на единицу затрат ресурса вида s (заметим, что y_{js} равно затратам с обратным знаком). Это увеличение называют предельной продуктивностью s. Соотношение (2.45) определяет с точностью до знака дополнительное количество затрачиваемых ресурсов затрат r, компенсирующих уменьшение на единицу затрат s.

Заметим также, что первые производные f_{jh} производственной функции f_j должны принимать неотрицательные значения в каждой технологически эффективной точке. Действительно, рассмотрим малое приращение dy_j, все компоненты которого равны нулю, за исключением dy_{jK}, которое положительно. Так как вектор технологически эффективен, то $y_j^0 + dy_j$ не является технологически достижимым, иными словами $f(y_j^0 + dy_j) > 0$. Но так как значение $f(y_j^0) = 0$, то значение $f(y_j^0 + dy_j)$ может быть положительным только в том случае, когда $f_{jK} \geq 0$.

Предполагая возможность замены одного ресурса другим, мы существенно ограничиваем множество возможных ситуаций, имеющих место в реальных экономических системах. Так, в большинстве производств по переработке первичных продуктов при некоторых производ-

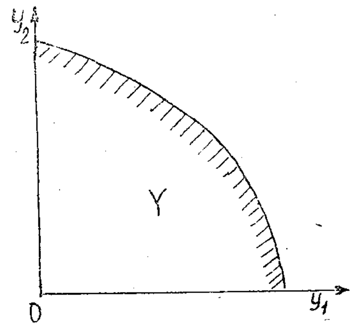

Рис. 2.2

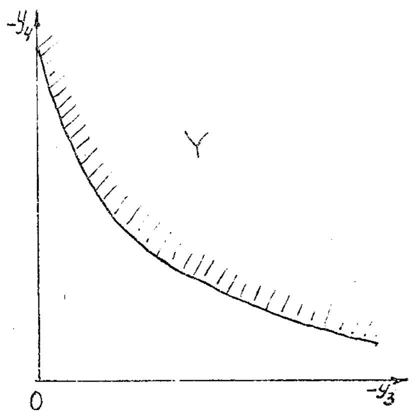

Рис. 2.3

Пусть предприятие производит один вид продукции, например y_{j1}. В этом случае возможно представление производственной функции в форме

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{je}) = y_{j1} - g_j(y_{j2}, y_{j3}, \dots, y_{je}). \qquad (2.38)$$

Технологические ограничения записываются следующим образом:

$$y_{j1} \le g_j(y_{j2}, \dots, y_{je}). \qquad (2.39)$$

В моделях (2.39) термин "производственная функция" также используется, чтобы характеризовать функцию g_j, которая определяет выпуск продукции в зависимости от затрат ресурсов. Здесь возможно наложение прямых ограничений в модели на факторы производства, т.е.

$$y_{jh} \ge 0 \qquad (h = \overline{2, e}). \qquad (2.40)$$

Подобная неоднозначность снимается по ходу постановки задачи моделирования системы и не порождает путаницы.

Рассмотрим теперь одно из свойств моделей производства, в котором допускается возможность замены одного вида продукции другим. Выделим в j-м производстве два близких технологически эффективных вектора $y_j^{(0)}$ и $y_j^{(0)} + dy_j$. Поскольку для этих векторов выполняется (2.36), то, следовательно,

$$\sum_{h=1}^{e} f_{jh}\, dy_{jh} = 0, \qquad (2.41)$$

вимся немного на результате (2.21), характеризующем отношения предельных полезностей продуктов в состоянии равновесия.

Предположим, что пара продуктов k и r взаимозаменяемы в том смысле, что два различных набора, отличающихся один от другого различными количествами этих продуктов, обеспечивают потребителю одну и ту же полезность. Итак, пусть имеется исходный набор x_i. Изменим немного этот набор. Пусть, например, потребление продукта r увеличится на величину dx_{ir}, а потребление продукта k уменьшится на величину dx_{ik} (dx_{ir} – положительно, dx_{ik} – отрицательно). Полезность набора остается неизменной при условии, что потребитель безразличен к результату одновременного изменения этих двух величин, т.е. если

$$dS_i = S_{ir}\, dx_{ir} + S_{ik}\, dx_{ik} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

или

$$-\frac{dx_{ir}}{dx_{ik}} = \frac{S_{ik}}{S_{ir}}, \qquad i = \overline{1, n}. \qquad (2.23)$$

Отношение S_{ik}/S_{ir} называется предельной нормой замещения продукта k продуктом r. Это – дополнительное количество продукта r, которое компенсирует i-му потребителю уменьшение располагаемого им количества продукта k на единицу в предположении, что эта единица очень мала. Когда условие (2.23) выполнено, потребитель приписывает одну и ту же полезность набору x_i и набору $x_i + dx_i$, если все компоненты вектора dx_i, кроме dx_{ir} и dx_{ik}, равны нулю. Если же потребитель находится при этом в состоянии равновесия, то тогда наборы x_i^* и $x_i^* + dx_i$ должны иметь и одинаковую цену, так как в этом состоянии выполняется условие (2.21), а с учетом (2.23) сразу получим, что

$$p_r\, dx_{ir} + p_k\, dx_{ik} = 0,$$

т.е. два различных набора эквивалентны и имеют одинаковую цену.

Составить теперь систему уравнений, описывающих вторую группу условий ограничений, определяющих порядок формирования цен на продукты потребления в состоянии равновесия. Эту систему уравнений получают из закона Вальраса. В его основу положено следующее. Любое лицо, которое предъявляет спрос на товар, например на товар h в количестве x_{ih}, готово предложить в обмен либо сумму денег, либо другие товары стоимостью равной стоимости товара h в количестве x_{ih}. Подобно этому тот, кто предлагает некоторое количество товаров на рынке, скажем $\overline{x_{ih}}$, в обмен испрашивает эквивалент их стоимости в деньгах или товарах. Каждому спросу, таким образом, соответствует равное предложение на некоторые товары и наоборот. Из этого непосредственно следует, что общая стоимость всех товаров на стороне каждого i -го предложения

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k \overline{x_{ik}}$$

должна равняться общей стоимости всех товаров на стороне того же i -го спроса

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k x_{ik}.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k (x_{ik}-\overline{x_{ik}})=0 \quad (i=\overline{1,n}). \qquad (2.24)$$

Заметим, что значения $(x_{ik}-\overline{x_{ik}})$ могут быть как отрицательными, так и положительными. Потребитель приобретает количество продуктов $(x_{ik}-\overline{x_{ik}})$, если эта разность положительная и уступает это количество в противоположном случае.

Рыночное условие равновесия заключается в том, что цены товаров должны быть совместны с равенством спроса и предложения каждого товара из общей совокупности ℓ товаров. Это означает, что для каждого k -го товара в отдельности должно соблюдаться равенство покупок и продаж, т.е.

$$p_k \sum_{i=1}^{n} (x_{ik}-\overline{x_{ik}})=0 \quad (k=\overline{1,\ell}). \qquad (2.25)$$

В отношении системы (2.25) можно показать, что одно условие при $k=\ell$ можно исключить, так как суммируя для каждого потребителя условия сбалансированности бюджета (2.24), получаем

$$0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} p_k (x_{ik}-\overline{x_{ik}})=\sum_{k=1}^{\ell} p_k \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x_{ik}})\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell-1} p_k \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x_{ik}})\right\}+p_\ell \sum_{i=1}^{n}(x_{i\ell}-\overline{x_{i\ell}})\}.$$

Теперь, если положить, что для (ℓ -I) продуктов справедливо, что (2.25), т.е.

$$\sum_{k=1}^{\ell-1} \left\{\sum_{i=1}^{k}(x_{ik}-\overline{x_{ik}}\right)=0,$$

то тогда равенство

сформулируем основные понятия и допущения, связанные с производственными функциями в описании моделей производства.

Итак, производственная функция f_j для рассматриваемого j -го предприятия есть по определению действительная функция, определенная в E^e, такая, что

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{je})=0 \qquad (2.36)$$

тогда и только тогда, когда вектор y_j является эффективным, и такая, что

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{je})\le 0, \qquad (2.37)$$

когда

$$y_j \in Y_j.$$

Подчеркнем, что y_{jk}, как аргумент производственной функции, определяет количество k -го вида продукции в j -м производстве. В целом же модель производства в экономической системе включает m таких производств. При построении производственной функции будем считать, что $y_{jk}>0$, если соответствующий вид продукции выпускается на j -м предприятии; $y_{jk}<0$, если соответствующий вид продукции на j -м предприятии рассматривается как фактор производства и, наконец, $y_{jk}=0$, если в j -м производстве не используется соответствующий вид продукции.

Рассмотрим пример. Пусть моделируется работа предприятия № I, на котором y_{11} и y_{12} – возможные объемы выпускаемой продукции двух разных видов, а $(-y_{13})$ и $(-y_{14})$ – объемы различных факторов производства или соответствующие затраты предприятия в натуральном измерении.

На рис. 2.2 представлено множество возможных выпусков продукции при фиксированных затратах $(-y_{13}^{(0)})$ и $(-y_{14}^{(0)})$ обоих факторов производства, на рис. 2.3 множество затрат, позволяющие получить выпуск продукции в фиксированных количествах $y_{11}^{(0)}$ и $y_{12}^{(0)}$. Заштрихованные области определяют множество производственных возможностей.

Отметим, что точки, удовлетворяющие уравнению (2.36), представлены в виде северовосточной границы на рис. 2.2 и югозападной на рис. 2.3. Множество точек, которые подобно кривой на рис. 2.3, представляет все технологически эффективные комбинации затрачиваемых ресурсов, позволяющие получить заданное количество выпускаемой продукции, называют изоквантой.

Выражение (2.36) является наиболее общей формой представления производственной функции. Существуют частные представления.

пользованием функций издержек решаются такие важные для экономического анализа задачи, как выбор решений в деятельности предприятия на длительный период, его развитие и касающейся всей организации производства, выбор оборудования и технологических процессов, а также выбор решений на короткий период, касающейся использования уже имеющихся в распоряжении производственных мощностей. Вместе с тем применение функций издержек в моделировании производственных условий экономической системы ограничено следующими обстоятельствами.

С одной стороны, соотношение между стоимостью факторов производства и выпуском зависит от цен p_h различных ресурсов так, что функция издержек изменяется при изменении этих цен.

С другой стороны, модель предприятия, построенная на основе анализа издержек плохо согласуется с моделью общего равновесия, в которой цены рассматриваются как эндогенные, а не являются определенными заранее.

От этих недостатков свободно использование в моделях производства аппарата производственных функций и аппарата теоретико-множественного анализа деятельности. Использование последнего подхода в моделях производства наиболее современно. Его существенное преимущество в сравнении с производственными функциями заключается в том, что он одновременно охватывает оба случая альтернативных производственных ситуаций - наличия строгой пропорциональности в использовании производственных ресурсов, и возможности замены одного ресурса другим. В частности, определение множества Y_j может одновременно учитывать заменяемость машинного и ручного труда и необходимые пропорции между промежуточными продуктами, используемыми в различных технологических процессах.

При построении же экономико-математических моделей производства на основе производственных функций надо выбирать между двумя такими типами формализаций, либо использовать производственные функции, предполагающие широкие возможности замещения, либо использовать функции для описания производств с фиксированными технологическими коэффициентами.

Отметим, что при построении экономико-математических моделей на уровне производственно-технологического описания экономических систем аппарат производственных функций используется в настоящее время значительно шире, чем теоретико-множественный подход в описании множества технологических ограничений, поэтому здесь мы

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{il} - \overline{x_{il}}) = 0$$

справедливо и для $h = l$. Таким образом, в (2.25) последнее равенство при $h = l$ можно исключить.

Теперь можно записать искомую модель равновесия в сфере обмена:

$$\frac{S_{ih}}{p_h} = S_{il} \qquad (i = \overline{1,n}; \quad h = \overline{1,l-1}); \qquad (2.26)$$

$$\sum_{h=1}^{l} p_h (x_{ih} - \overline{x_{ih}}) = 0 \qquad (i = \overline{1,n}); \qquad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ih} - \overline{x_{ih}}) = 0 \qquad (h = \overline{1, l-1}). \qquad (2.28)$$

Всего имеется (l -I) n уравнений в (2.26); n уравнений в (2.27) и (l -I) уравнений в (2.28).

Общее число уравнений

$$ln - n + n + l - 1 = l(n+1) - 1,$$

а число переменных равно $ln + l - 1 = l(n+1) - 1$, т.е. число уравнений, описывающих условие равновесия в сфере обмена, совпадает с числом переменных, а значит система (2.26) - (2.28) замкнута и совместна с условиями равновесия.

Всю систему уравнений можно разбить на отдельные модели. Каждая из них - это открытая модель.

Так, модель индивидуального спроса будет описываться системой из (l -I) уравнений (2.26) и одним уравнением из (2.27). Этих l уравнений достаточно, чтобы определить переменные через заданные цены для каждого i -го потребителя. Открытая модель рыночного равновесия описывается в таком случае уравнением совокупного спроса и предложений, т.е. системой из (l -I) уравнений (2.28). Положим

$$x_h = \sum_{i=1}^{n} x_{ih} \qquad (h = \overline{1,l}); \qquad (2.29)$$

$$\overline{x_h} = \sum_{i=1}^{h} \overline{x_{ih}} \qquad (h = \overline{1,l}). \qquad (2.30)$$

45

так, что x_k – совокупный спрос, а $\bar{x}_k$ – совокупное предложение k -го товара. Величина $\bar{x}_k$ задается, а x_k определяется путем индивидуального спроса через цены p_k. Следовательно, условие (2.28) имеет вид:

$$x_k = \bar{x}_k \qquad (k = \overline{1, \ell-1}), \tag{2.31}$$

т.е. получаем (ℓ -I) уравнение, в которое входит (ℓ -I) цен p_k, причем p_ℓ = I.

2.3. Экономико-математическая модель производства. Основные понятия

Прежде чем перейти к построению экономико-математической модели общего равновесия в экономической системе, включающей как потребителей, так и производителей, сформулируем основные понятия, положенные в основу модели производства, и дадим им краткую характеристику.

Модель производства должна содержать описание технологических ограничений, которые отражают возможные производственные процессы, а также формализованный выбор решения для предприятия, которое действует в определенной обстановке. Как и при построении модели потребления будем рассматривать деятельность производителей в условиях совершенной конкуренции. Это описание не претендует на применимость для всех реальных ситуаций, однако оно дает возможность построить модель общего равновесия экономической системе на рынке ℓ товаров.

Для моделирования экономических систем детальное описание технологических процессов нецелесообразно в той же степени, как и подробное описание мотивов поведения потребителя в моделях потребления и обмена. Важна лишь формализация требований, предъявляемых технологическим процессом к производителю. При построении модели производства эти требования в целом сводятся к следующему: наборы продуктов j -го производства

$$y_j = \begin{bmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ \vdots \\ y_{j\ell} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

должны соответствовать технологически возможным преобразованиям затрачиваемых ресурсов в выпускаемую продукцию. Таким образом, в наиболее общем виде технологические условия производства могут быть представлены простым ограничением

$$y_j \in Y_j \qquad (j = \overline{1, m}), \tag{2.33}$$

где Y_j – множество возможных наборов продукции в общем случае как выпускаемой, так и затрачиваемой на j -м производстве.

Конкретизируя модель того или иного производства, следует учитывать, что не все технологически возможные преобразования представляют интерес. Для одних технологий может потребоваться больше затрат при меньшем выпуске по сравнению с другим. Естественно требование отразить в модели такую организацию производства, при которой исключаются экономически невыгодные процессы. Поэтому формализация на этом пути предполагает рассмотрение в модели производств, которые являются технологически эффективными. Под этим имеются в виду такие технологические преобразования, которые нельзя модифицировать так, чтобы получить больше выпускаемой продукции какого-то вида без уменьшения выпуска какого-либо из остальных продуктов.

Формально вектор $y_j^{(1)}$ j -го производства называется технологически эффективным, если он принадлежит множеству Y_j возможных наборов продукции, и если в этом множестве не существует другого вектора $y_j^{(2)}$ такого, что по множеству компонентов выпусков продукции выполняется условие

$$y_{jt}^{(2)} \geq y_{jt}^{(2)}, \qquad t \in T_j \tag{2.34}$$

где T_j – множество индексов, обозначающие соответствующие выпуски j -го производства, и при этом для некоторого t

$$y_{jt}^{(2)} > y_{jt}^{(1)}. \tag{2.35}$$

В экономико-математических моделях производства применяются различные способы описания производственного множества Y_j для представления технологических ограничений. Эти способы отличаются один от другого первичными понятиями, положенными в основу теории предприятия. Такими понятиями являются: функции издержек, производственные функции и теоретико-множественное представление технологических ограничений.

Функция издержек в моделях производства – эта зависимость, которая ставит в соответствие произведенному количеству y_{jt} на j -м производстве минимальное значение затрат ресурсов, позволяющих осуществить этот выпуск продукции. Таким образом, минимизация издержек, и связанные с этим функции издержек могут выступать в моделях производства в качестве этапа максимизации прибыли. С ис-