МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ
Московский технический университет связи и информатики

Кафедра организации производства, аудита
и бухгалтерского учета

Методические указания
и задания к контрольной работе
по дисциплине

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

для студентов-заочников 5 курса
(специальности: 060500, 060800)

Москва 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано в печать 31.10.03г. Формат 60x84/16.Объем 3,8усл.п.л.
Тираж 100 экз. Изд. № 128. Заказ 349.
ООО "Инсвязьиздат". Москва, ул. Авиамоторная, 8.

Окончание табл. 2

Вариант	a	b	d	p, тыс.р./ед.
5	1/120	1	46	30
6	1/270	2/3	50	45
7	4/270	2/3	55	51
8	3/160	9/8	43	35
9	1/270	1/3	20	16

Задача 3.

Предприятие-монополист выпускает однородную продукцию. Известно:

функция спроса на товарную продукцию монополиста

$p(q) = a - bq$, тыс.р./ед.;

функция издержек

$C(q) = c + dq^2$, тыс.р.,

где q - объем выпуска; a, b, c, d - константы аппроксимации функций спроса и издержек.

Предприятие в состоянии организовать оптимальный режим производства, обеспечивающий получение наибольшей прибыли.

Требуется определить при таком режиме производства:

- объем выпуска,
- рыночную цену,
- общие значения дохода, издержек и прибыли,
- средние значения дохода, издержек и прибыли,
- предельные значения дохода, издержек и прибыли,
- коэффициент ценовой эластичности спроса на продукцию монополиста.

Дайте геометрическую интерпретацию решения, для чего постройте кривые:

- общих издержек, дохода и прибыли (верхний график);
- средних и предельных значений дохода, издержек и прибыли.

Исходные данные приведены в табл. 3.

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с учебным планом студенты заочного факультета МТУСИ, обучающиеся по специальности 060500 и 060800, выполняют контрольную работу по дисциплине «Методы и модели в экономике».

Кафедра организации производства, аудита и бухгалтерского учета (ОПАБУ) считает целесообразным из широкого круга задач, решаемых на основе моделирования, отобрать для контрольной работы задачи рационального ведения хозяйства.

В целях обеспечения студентов необходимыми для решения задач теоретическими положениями их постановка дополняется сведениями из теории моделирования проблемы рационального ведения хозяйства, а также приводятся решения контрольных примеров по всем поставленным в контрольной работе заданиям.

В ходе выполнения каждого задания студент должен составить для себя цели задачи, сформулировав критерии и ограничения на задачу, составить экономико-математическую модель и получить оптимальное решение. Работа будет выигрывать, если в ней будет дан экономический анализ получаемых результатов. Каждое из трех заданий контрольной работы разбито на десять вариантов.

Номера вариантов (от 0 до 9) по каждому заданию контрольной работы определяются последней цифрой студенческого билета.

Контрольная работа выполняется в соответствии с общепринятыми требованиями. Должна быть аккуратно оформлена, написана чернилами разборчивым почерком. После изложения решения задач по каждому заданию следует оставить по два листа для замечаний преподавателя и ответов на них студента

Страницы должны быть пронумерованы. Рисунки и таблицы также нумеруются и должны иметь названия. Все исправления делать только чернилами. Работа подписывается студентом.

В конце работы помещается список использованной литературы.

После завершения контрольной работы студент представляет ее на кафедре ОПАБУ для проверки.

Неправильно выполненная работа с оценкой «незачет» возвращается обратно студенту и должна быть после доработки студентом вновь решения. Однако, построенная система представляет собой мощное средство при системном подходе к решению проблемы. Эта общая модель может быть разбита на ряд частных моделей. К примеру, уравнения (1) к (3) определят нам функцию спроса первого потребителя в предположении, что область возможных цен и доход заданы; аналогично уравнения (2) и (4) определят нам функцию спроса второго потребителя. Далее может быть определена функция рыночного спроса на потребительские товары и т.д.

4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы студент должен решить три задачи. Исходные данные по каждой из них в зависимости от варианта представлены в соответствующих таблицах.

Задача 1.

Некий потребитель приобретает на рынках чистой конкуренции два вида продуктов.

Известно:

функция полезности набора продуктов для потребителя

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = a_1 x_{11} - b_1 x_{11}^2 + a_2 x_{12} - b_2 x_{12}^2 ;$$

- величина бюджета, выделенного на приобретение набора R_1;
- рыночные цены продуктов первого вида P_1, второго вида $P_2 = 1$ тыс.р.

Исходные данные приведены в табл. 1.

Определите набор, обеспечивающий потребителю наибольшую полезность. Дайте геометрическую интерпретацию полученного решения с использованием кривой безразличия и бюджетного ограничения.

Таблица 1

Вариант	a_1	a_2	b_1	b_2	P_1, тыс.р./ед.	R_1, тыс.р.
0	48	32	2	3	3	22
1	13	17	1	1	5	28
2	32	15	2	2	4	23
3	32	40	3	3	2	14
4	78	50	3	4	3	29
5	48	60	2	3	4	33

всего разделяется на собственно изучаемую систему и внешнюю среду. Изучаемая система представляется в виде подсистем, составы которых определены, определена также и граница системы в целом.

На основе предварительного анализа выделяются существенные связи между подсистемами, и тем самым формируется структура изучаемой системы. Далее определяются связи построенной таким образом условно выделенной системы с другими, учитываются факты, которые воздействуют на нее, формируются возможные внешние воздействия, которые представляются в виде совокупности элементарных воздействий.

Третий этап – составление математической модели изучаемой системы, ее анализ и решение. На этом этапе в соответствии с поставленной проблемой вводятся параметры, переменные, устанавливаются зависимости между введенными параметрами и переменными. На основе результатов, полученных на предыдущем этапе системного анализа, определяется иерархия выделенных подсистем и элементов. Реальный экономический объект в процессе системного анализа может рассматриваться как сочетание разных иерархических структур (отраслевой, территориальной, функциональной).

Под иерархической структурой понимается такая структура, в которой существует подразделение множества составляющих ее элементов на подмножества разных уровней – подсистемы, обладающие свойствами целостности. Подобно исходной системе, выделенные подсистемы обладают определенной степенью саморегулирования. Часто в иерархической структуре имеют место многоступенчатые отношения подчинения подсистем одних уровней другим. В то же время в системе допускаются и горизонтальные связи между подсистемами.

1.2. Постановка проблемы для моделирования

В настоящих методических указаниях приведены краткие сведения по применению методов моделирования для исследования главной экономической проблемы, называемой еще и проблемой рационального ведения хозяйства. Выше было определено, что постановка такой проблемы связана с ограниченностью ресурсов для достижения поставленных целей. Именно вследствие ограниченности ресурсов приходится выбирать тот или иной вариант их использования.

$$u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} = 2a_1 x_{12} + 2h_1 x_{13};$$
$$u_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_{13}} = 2h_1 x_{12} + 2b_1 x_{13};$$
$$u_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_{11}} = 2a_2 x_{21} + 2h_2 x_{23};$$
$$u_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_{23}} = 2h_2 x_{21} + 2b_2 x_{23}.$$

В результате получили систему уравнений

$$a_1 x_{12}^* + h_1 x_{13}^* = p_2 (h_1 x_{12}^* + b_1 x_{13}^*); \qquad (1)$$

$$a_2 x_{21}^* + h_2 x_{23}^* = p_1 (h_2 x_{21}^* + b_2 x_{23}^*), \qquad (2)$$

где $a_1, a_2, h_1, h_2, b_1, b_2$ - известные коэффициенты квадратичной аппроксимации функций полезности.

Первый индивидуум организует производство продуктов третьего вида, получая при этом максимальную прибыль P*.

Бюджет этого потребителя, используемый для приобретения набора, в состоянии равновесия составит

$$S_1^* = p_1 \bar{x}_{11} + P^*,$$

а бюджет другого будет равен

$$S_2^* = p_2 \bar{x}_{22}.$$

Значения S1* и S2* определяют в денежном выражении величины индивидуальных предложений на конкурентных рынках со стороны каждого из потребителей. Соответственно величины индивидуального спроса составят:

$$Д_1^* = p_1 x_{12}^* + x_{13}^*;$$

$$Д_2^* = p_1 x_{21}^* + x_{23}^*.$$

В состоянии равновесия

$$Д_i^* = S_i^*, \quad i = 1, 2,$$

поэтому получаем еще два уравнения:

$$-p_1 \bar{x}_{11} + p_2 x_{12}^* + x_{13}^* = P^*; \qquad (3)$$

$$p_1 x_{21}^* - p_2 \bar{x}_{22} + x_{23}^* = 0. \qquad (4)$$

Опишем теперь условия производства. Состояние равновесия характеризуется оптимальным производственным набором:

количества произведенных, обменных и потребленных продуктов. Достижению этой цели способствует построение одной общей модели, состоящей из определенного ряда взаимосвязанных частных моделей, имеющих общие для всех элементы, называемые основными элементами. Дадим описание элементов, лежащих в основании проблемы рационального ведения хозяйств.

1.3. Описание основных элементов

При построении как общей, так и частной моделей, исследования проблемы основными элементами являются:

- участники экономического процесса;
- блага;
- начальные запасы благ;
- собственно экономика.

Участники экономического процесса – это индивидуумы или группы индивидуумов, составляющие элементарные действующие единицы. Каждый участник способен принимать самостоятельные решения.

Участников будем делить на две категории: производители (предприятия или фирмы), которые преобразуют одни блага в другие, и потребители, которые используют некоторые блага на собственные нужды. Блага предназначены для удовлетворения потребностей человека.

Особо важным благом является труд, поскольку он является основным элементом всякого производства. Строго говоря, следует различать столько благ, сколько существует типов труда.

Для определения будем считать, в исследуемой нами основной модели микроэкономики имеется *l* благ, *n* потребителей и *m* производителей. Причем индивидуум может рассматриваться либо как потребитель, либо как производитель, либо как производитель и потребитель одновременно.

В отношении же благ можно отметить, что некоторые имеющиеся блага могут быть использованы как для производства, так и для потребления. Все блага имеют цену. Коротко остановимся на каждом из этих понятий.

1. Каждое благо, вид которого будем обозначать текущей целочисленной переменной *h* (*h*=1,2,...,*l*), имеет определенную единицу измерения. Считаем, что два равных количества одного и того же блага эквивалентны для каждого потребителя и каждого производителя. Индивидуумы часто имеют дело с набором

т.е. эластичность спроса на товар монополиста равняется -3. Величина отрицательна, поскольку товар нормальный.

Заметим, что коэффициент ценовой эластичности спроса Ep(q.) в состоянии равновесия можно было бы вычислить по общей формуле:

$$\varepsilon_p(q^*) = \frac{p^*}{q^*} \cdot \frac{dp}{dq}\bigg|_{q^*} = \frac{30}{10}(-1) = -3.$$

На рис. 6 приведен графический расчет определения оптимального режима производства-монополиста.

3.4. Пример общего экономического равновесия

Задача 11.

Два индивидуума (i=l,2) обладают начальными запасами благ двух видов (h=l,2). Каждое благо может быть как предметом потребления, так и производственным ресурсом.

Первый индивидуум имеет запасы блага второго вида и при организованных рынках не предъявляет потребительского спроса на второй продукт. Второй имеет запасы благ первого вида и не предъявляет потребительского спроса на первый продукт.

Первый индивидуум является предпринимателем. Он организует из имеющихся благ производство продукта третьего вида, получая при этом определенную прибыль.

Продукция производства пользуется потребительским спросом обоих индивидуумов.

Известно:

начальные запасы благ у индивидуумов

$\bar{x}_{12}$ и $\bar{x}_{21}$;

функции полезности потребительских наборов:

для первого потребителя

$$u_1(x_{12}\ x_{13}) = a_1 x_{12}^2 + 2h_1 x_{12} x_{13} + b_1 x_{13}^2 ,$$

для второго потребителя

$$u_2(x_{21}\ x_{23}) = a_2 x_{21}^2 + 2h_2 x_{21} x_{23} + b_2 x_{23}^2 ,$$

производственная функция

$$f_1(y_{11}\ y_{12}\ y_{13}) = y_{11} y_{12} - a y_{13} = 0 ,$$

рынки функционируют в условиях чистой конкуренции.

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ M \\ a_{j\lambda} \end{bmatrix} \text{ и } b_j = \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ M \\ b_{j\lambda} \end{bmatrix}$$

соответственно векторы, представляющие собой наборы ресурсов a_{jh} и выпусков b_{jh}. Вводится понятие чистой продукции блага h, выпускаемой производителем j, количество которой

$$y_{jh} = b_{jh} - a_{jh}, \quad j = \overline{1,m}, \quad h = \overline{1,\lambda}. \qquad (2)$$

Так же, как и значения x_{ih}, значения y_{jh} не всегда положительны: они положительны, если благо h выпускается на j-м производстве, и отрицательны, если они затрачиваются. Такой подход к описанию поведения производителя позволяет при системном подходе не делать различия между ресурсами и выпускаемой продукцией, если оперировать производственными наборами чистой продукции

$$y_j = \begin{bmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ M \\ y_{j\lambda} \end{bmatrix}.$$

4. Начальные запасы. Естественно считать, что организация экономической деятельности возможна только в том случае, если в системе изначально имеется некоторое количество каждого блага, которое можно задать вектором начальных запасов

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ M \\ \bar{x}_\lambda \end{bmatrix}.$$

Мы полагаем, что в основе распределения начальных запасов каждого h-го блага лежит частная собственность на эти блага, т.е.

$$\bar{x}_h = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{ih}, \qquad h = \overline{1,\lambda}, \qquad (3)$$

где $\bar{x}_{ih}$ - запас h-го блага у i-го потребителя.

5. Экономика определяется перечнем благ, потребителей, производителей, начальных запасов с их последующим распределением по потребителям. Это означает, что можно оценивать состояние экономики, которое таким образом

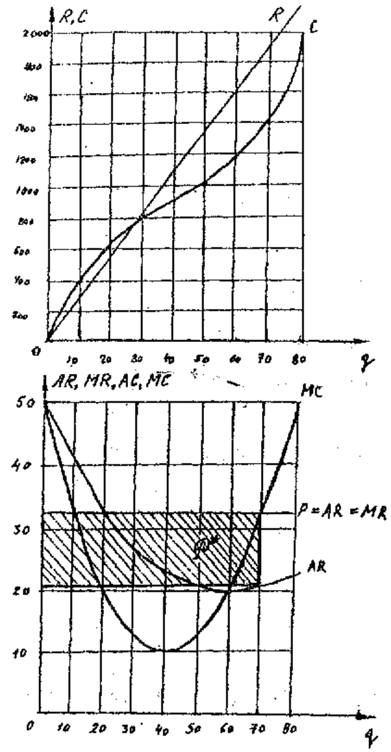

Рис. 5. Графический расчет оптимального режима при чистой конкуренции

Требуется определить при таком режиме производства;

- объем выпуска;
- рыночную цену;
- общий доход;
- общие и средние издержки;
- общую и среднюю прибыль;
- коэффициент ценовой эластичности спроса на продукцию предприятия.

Решение.

В общем случае доход монополиста при выпуске в объеме q определяется по формуле

$R(q) = p(q)\,q$,

существенными и которыми ни один экономист не может пренебречь, какова бы ни была специфика его работы.

2.ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПРОБЛЕМ РАЦИОНАЛЬНОГО ВЕДЕНИЯ ХОЗЯЙСТВ.

2.1.Определение декомпозиции

Декомпозиция основана на рациональном расчленение сложной проблемы и решении отдельных проблем (задач) с последующим согласованием частных решений для получения общего оптимального решения. В качестве таких задач в рамках поставленной проблемы мы будем рассматривать:

- рациональное потребление,
- рациональное производство,
- обмен при разных структурах рынков.

Построение моделей указанных задач проводится с использованием материалов, излагаемых в курсе дисциплины «Экономико-математические методы и модели народного хозяйства», изучаемой студентами заочного обучения на третьем курсе экономического факультета.

2.2.Модель рационального потребления

Модель рационального потребления – это одна из частных моделей, с помощью которых мы должны уметь дать формальное представление человеческих потребностей, отражающих различную степень их удовлетворения, а также объяснить выбор, осуществляемый потребителями в зависимости от имеющихся у них возможностей и известных предпочтений по отношению к приобретаемым благам. С использованием модели следует объяснить, каким образом определяется вектор x_i, т.е. потребительский набор благ x_{ih} для i -го потребителя. В соответствии с требованиями системного подхода при построении модели надо описать ее основные элементы, формирующие модель. Это позволит сформулировать цель исследования на данном уровне анализа.

Идея модели, определяющая такую цель, очень проста: потребитель выбирает лучший набор благ среди множества доступных наборов. Детализируя идею, следует уточнить, что понимается под доступным набором и каково формальное представление предпочтений потребителей. Доступность набора в общем случае различна от потребителя к потребителю и определится

Задача 9.

Предприятие выпускает однородную продукцию и реализует ее на конкурентном рынке.

Известно:

функция издержек

$C(q) = \frac{1}{120} q^3 - q^2 + 50q$, тыс.р.;

рыночная цена товарной продукции

p = 32,5 тыс.р./ед.

Предприятие в состоянии организовать оптимальный режим производства. Требуется определить при таком режиме:

- объем выпуска;
- общий доход;
- общие и средние издержки;
- общую и среднюю прибыль.

Решение.

Оптимальный режим производства соответствует такому объему выпуска, при котором предельная прибыль обращается в ноль, или, что то же самое, предельные издержки равны предельному доходу.

Поскольку в условиях чистой конкуренции предельный доход равен рыночной цене товарной продукции, то для определения оптимального выпуска q* надо решить уравнение

$MC(q^*) = p$, тыс.р./ед.,

где MC(q*) - предельные издержки при выпуске q* .

По определению:

$MC(q) = \frac{dC}{dq} = \frac{1}{40} q^2 - 2q + 50$, тыс.р./ед.

При оптимальном режиме с учетом исходных данных имеем

$\frac{1}{40}(q^*)^2 - 2q^* + 50$ = 32,5 тыс.р./ед.

Решая это уравнение, получаем q^* = 70 ед. товарной продукции.

Общий доход предприятия

$R(q^*) = pq^*$ = 2275 тыс.р.

Общие издержки

где E^n - n-мерное Евклидово пространство.

Определенный на основе решения этой модели вектор x_i^* называется в системном анализе частным равновесием i-го потребителя в модулируемой системе. Принято считать, что функции U_i , а также векторы начальных запасов потребителей $\bar{x}_i$ заданы экзогенно. Значения же векторов x_i^* и p являются величинами эндогенными (подлежащими определению в модели).

Экзогенная (внешняя по отношению к системе)величина U_i-это скалярная функция, обладающая следующими свойствами.

1*. Чем больше какого-либо блага h в наборе x_i, тем выше его полезность для i-го потребителя при прочих равных условиях.

2*. Каждая последующая единица увеличивает полезность набора для потребителя, но уровень прироста от нее меньше, чем от предшествующей. Придание таких свойств наборам благ позволило, как будет показано ниже, объединить при системном анализе общего равновесия условия, которым отвечает производство, с потребностями потребителей.

С учетом сформулированных свойств, которыми обладают функции полезности, можно уточнить формулу (8) для описания множества X_i допустимых наборов. Действительно, если какой-либо потребитель выделил для приобретения набора благ доход в размере R_i, то в силу свойства 1* потребитель израсходует всю величину выделенного для этих целей дохода,т.е. R_i, а значит(8) примет вид

$$X_i = \{x_i \in E^n \mid \sum_{h=1}^{\lambda} p_h x_{ih} = R_i,\ i = \overline{1,n}\}. \qquad (9)$$

Сделаем еще одно замечание в отношении формулы, описывающей множество допустимых наборов. По этой формуле стоимость каждого приобретаемого блага определяется произведением цены на количество этого блага, т.е. $p_h\ x_{ih}$. Таким образом, мы полагаем, что цена p-го блага никак не зависит от того количества, которое приобретает в отдельности каждый потребитель. Принято считать, что такая ситуация имеет место, когда потребитель приобретает наборы на конкурентных рынках, или как еще говорят, в условиях чистой (совершенной) конкуренции. Формализуя это условие, говорят, что потребитель находится в условиях совершенной конкуренции, если цена каждого блага определяется экзогенно для него и, следовательно, не зависит от

Мы видим, что эта модель также принадлежит к классу классических задач математического программирования и может быть проанализирована с использованием метода множителей Лагранжа.

Лагранжиран модели

$$L(q,k,\ell,\lambda) = p(q)q - w_k(k)k - w_\ell(\ell)\ell - \lambda(q - q(k,\ell)).$$

Необходимые условия, соответствующие оптимальному производственному набору, находятся, как обычно, приравниванием нулю всех частных производных лагранжирана:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p(q^*) + \frac{dp(q)}{dq}\bigg|_{q^*} q^* - \lambda^* = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = -w_k(k^*) - \frac{dw_k}{dk}\bigg|_{k^*} k^* + \lambda^* \frac{\partial q}{\partial k}\bigg|_{k^*,\ell^*} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ell} = -w_\ell(\ell^*) - \frac{dw_\ell}{d\ell}\bigg|_{\ell^*} \ell^* + \lambda^* \frac{\partial q}{\partial \ell}\bigg|_{k^*,\ell^*} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = q^* - q(k^* \ell^*) = 0.$$

Первое уравнение показывает, что в условиях оптимальности множитель Лагранжа равен предельному доходу:

$$\lambda^* = p + \frac{dp}{dq} q \bigg|_{q^* k^* \ell^*} = MR(q^*).$$

Следующие два уравнения показывают, что предельные продуктивности затрат капитала и труда, равные предельному доходу, умноженному на соответствующие предельные продуктивности капитала и труда, в условиях оптимальности равны предельным стоимостям этих затрат, т.е.

$$MRP_k = MR\,MP_k = w_k + \frac{dw_k}{dk} k = MC_k;$$

$$MRP_\ell = MR\,MP_\ell = w_\ell + \frac{dw_\ell}{d\ell} \ell = MC_\ell.$$

Наконец, последнее уравнение отражает необходимость организации работы в строгом соответствии с заданной технологией. Так как оптимальная предельная стоимость выпуска равна

$$MC(q^*) = \frac{MC_k(k^* \ell^*)}{MP_k(k^* \ell^*)} = \frac{MC_\ell(k^* \ell^*)}{MP_\ell(k^* \ell^*)},$$

то окончательный вывод опять-таки свелся к прежней формуле. Предельные издержки должны быть равны предельному доходу:

$$MC(q^*) = MR(q^*).$$

Конечно, этой же системе уравнений должен удовлетворять и оптимальный набор x_i^*, полученный как решение модели (7), (9).

Общий подход к решению моделей типа (7), (9) был предложен Лагранжем и известен как метод множителей Лагранжа для решения классических задач математического программирования. Под классической понимается такая задача условной оптимизации, в которой система ограничений на переменные имеет вид системы уравнений. Подробно студентами этот метод изучается в курсе «Экономико-математические методы и модели народного хозяйства» (ЭММ) и поэтому нет нужды подробно освещать его в данной работе. Отметим только, что мы предполагаем, что функции полезности удовлетворяют всем требованиям, при которых возможно пользоваться при получении решения методом множителей Лагранжа, в частности, функции-полезности непрерывны и дифференцируемы, т.е. являются, как говорят, аналитическими функциями. В соответствии с алгоритмом, построенным по методу множителей Лагранжа, прежде всего надо составить лагранжиан модели. В нашем случае он имеет вид:

$$L_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i\lambda}, \lambda_i) = u_1(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i\lambda}) - \lambda_i\Big(\sum_{h=1}^{\lambda} p_h x_{ih} - R_i\Big), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (14)$$

Мы видим, что надо составить n лагранжианов, т.е. столько, сколько потребителей в системе.

Далее опять-таки в соответствии с алгоритмом надо применить так называемые необходимые условия первого порядка – если оптимальные наборы $x_i^*(i=\overline{1,n})$ существуют на соответствующих множествах допустимых наборов X_i, то значения частных производных по компонентам наборов x_{ih} и по множителям Лагранжа λ_i на этих наборах равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ih}}\bigg|_{x_i^*} = 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad h = \overline{1,\lambda}; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\bigg|_{x_i^*} = 0, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (16)$$

Применяя операторы (15), (16) к лагранжианам (14), получим систему уравнений для определения оптимального набора x_i^*.

Заметим, что данная система одновременно определит и так называемые оптимальные значения множителей Лагранжа

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*).$$

то, как и при системном подходе на основе функций издержек, в случае моделирования на основе производственных функций приходим к окончательному выводу по организации оптимального производства.

Надо обеспечить такой выпуск продукции, при котором предельные издержки производства должны сравняться с рыночной ценой продукции, т.е.

$$MC(q^*) = p.$$

Задача 8.

Предприятие, выпускающее однородную продукцию с использованием двух видов производственных ресурсов - труда и капитала, в состоянии влиять на цены продукции и ресурсов в зависимости от объемов выпуска и объемов производственного потребления ресурсов.

В этой ситуации говорят, что предприятие обладает монопольной и монопсонической властью (является монополистом и монопсонистом).

Известно:

- функция спроса на продукцию предприятия, в предположении, что
- продукт является нормальным товаром;
- функции цен на ресурсы, в зависимости от объемов производственного потребления ресурсов со стороны монопсониста;
- производственная функция.

Решение.

Предприятие, будучи монополистом, имеет возможность влиять на цену продукции путем изменения ее объема выпуска таким образом, что рыночная цена

$$p = p(q),$$

где p(q) - известная функция спроса на продукцию предприятия.

Поскольку продукт нормальный (ценовая эластичность спроса отрицательная), то в соответствии с законом спроса

$$\frac{dp}{dq} < 0.$$

Общий доход

$$R(q) = p(q)\,q.$$

Предельный доход

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = p + \frac{dp}{dq}\,q.$$

Откуда получаем, что

$$\left(\frac{P_1}{P_l}, \frac{P_2}{P_l}, \ldots, \frac{P_{l-1}}{P_l}, \frac{P_l}{P_l}\right),$$

а это и есть структура цен.

В данной строке переобозначают цены, окончательно вектор-строка цен при модельном исследовании принимает вид:

$$(P_1, P_2, \ldots, P_{l-1}, 1), \tag{24}$$

т.е. цена каждого h –го блага h=1, l-1 определяется в цене l-го блага.

С учетом всего сказанного модель рационального потребления в целом в окончательном виде примет вид:

$$\frac{U_{ih}}{P_h} = U_{il}, \quad i = \overline{1,n}, \quad h = \overline{1, l-1}; \tag{25}$$

$$\sum_{h=1}^{l} P_h (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) = 0, \quad i = \overline{1,n}; \tag{26}$$

$$\sum_{i=1}^{h} (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) = 0, \quad h = \overline{1, l-1}. \tag{27}$$

Можно показать, что общее число уравнений модели равно общему числу переменных. Действительно:

число уравнений (25) равно n (l-1), число уравнений (26) равно n, число уравнений (27) равно (l-1), итого: n l + l-1;

число переменных X_{ih} равно n l, число переменных P_h равно (l-1), итого: n l + l-1.

Это означает, что система при независимых потребителях и благах имеет единственное решение. Это, правда, не означает, что обязательно будет существовать реальное, действительное равновесие в сфере обмена и потребления. С чисто формальной точки зрения отсутствие равновесия соответствует случаям, скажем, отрицательных значений равновесных цен, что противоречит здравому смыслу. Возможны комплексные значения корней

Требуется определить режим производства, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль, в предположении, что оно работает строго по принятой технологии.

Решение.

Пусть известная производственная функция

$$q = q(k, l),$$

где k, l - количество капитала и труда при выпуске продукции в объеме q. Обозначим через W_k и W_l - рыночные цены капитала и труда.

В соответствии с поставленной задачей, определение оптимального режима производства (оптимального выпуска продукции q^* при соответствующем производственном потреблении ресурсов k^* и l^*) сведется к решению следующей модели.

Требуется найти такие q^*, k^* и l^*, при которых

$$P(q^*, k^*, l^*) = \max_{q,k,l} (pq - w_k k - w_l l)$$

при условии, что (q,k,l) удовлетворяют требованиям технологии:

$$q = q(k, l).$$

Получим экономико-математическую модель условной оптимизации, принадлежащую к классу классических задач математического программирования. Применяя метод множителей Лагранжа, запишем лагранжиран модели:

$$L(q, k, l, \lambda) = pq - w_k k - w_l l - \lambda(q - q(k, l)).$$

Если оптимальный режим существует, то при этом режиме выполняются необходимые условия:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p - \lambda^* = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = -w_k + \lambda^* MP_k = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = -w_l + \lambda^* MP_l = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = q^* - q(k^*, l^*) = 0,$$

где $MP_k = \frac{\partial q}{\partial k}$ и $MP_l = \frac{\partial q}{\partial l}$ - предельные производительности капитала и труда в оптимальном режиме соответственно.

Смысл системы (27) раскрыт выше. Напомним, что это система отражает равновесие на всех рынках благ кроме l-го. если это допустить, то равновесие на рынке l-го блага обеспечивается автоматически.

2.3. Модель рациональной организации производства

Модель рациональной организации производства, как и модель потребления, рассмотренная в предыдущем разделе, также является частной моделью при декомпозиции проблемы рационального ведения хозяйства. При построении модели по-прежнему будем считать, что производство, как одна из подсистем, организовано в экономической системе, включающей n потребителей, m предприятий, l рынков. Предполагается наличие начальных запасов благ X_h, находящихся в частной собственности потребителей. Так же, как и при системном анализе потребителя, в результате анализа рациональной организации производства следует ответить на два вопроса:

1.Как представляются технологические ограничения, которые ограничивают допустимые производственные наборы?

2.Как формализовать выбор наилучшего режима работы предприятия при определенных ограничениях на этот выбор, в частности, как со стороны собственно производства, так и со стороны той или иной структуры рынков, организованных в исследуемой экономике?

Для системного анализа экономической деятельности предприятия детального описания технологических процессов совершено не требуется, как, впрочем, не требуются и знания мотивов поведения потребителей в моделях потребления.

Однако, при моделировании производства в нашем случае очень важна формализация требований, предъявляемых технологическим процессом к производителю. В целом эти требования выражаются очень просто: некоторые производственные наборы $y_j(j = \overline{1,m})$ технологически возможным преобразованиям ресурсов в выпуски на j-м предприятии; другие наборы соответствуют преобразованиям, невозможным при существующей на предприятии технологии. В этой связи необходимо уточнить, что в условиях рациональной организации производства не все технологически возможные преобразования представляют интерес. Для одних технологий может потребоваться больше затрат ресурсов при меньшем выпуске по сравнению с

Требуется определить режим производства, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль, в предположении, что этот режим оно может реализовать.

Решение.

Введем обозначения: q - объем выпуска продукции; p - цена продукта; $C(q)$ - заданная функция издержек; $p(q)$ - функция прибыли предприятия.

В условиях чистой конкуренции доход предприятия

$$R(q) = pq,$$

а прибыль

$$P(q) = R(q) - C(q).$$

Поскольку режим, максимизирующий прибыль, по условию задачи может быть реализован, то его определение сводится к решению следующей модели.

Требуется найти q^*, при котором

$$P(q^*) = \max_q P(q) = \max_q [pq - C(q)],$$

где q^* - выпуск продукции в оптимальном режиме.

Реализация режима в соответствии с такой моделью требует выполнения необходимого условия первого порядка

$$MP(q)\big|_{q^*} = 0,$$

где MP(q*) - значение предельной прибыли в оптимальном режиме.

Это условие эквивалентно формуле:

$$MR(q^*) = MC(q^*),$$

где MR и MC - значения предельных дохода и издержек соответственно, т.е. в оптимальном режиме производства предельный доход должен равняться предельным издержкам.

Поскольку

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = p,$$

то необходимое условие первого порядка требует, чтобы

$$MC(q^*) = p,$$

т.е. предельные издержки должны равняться рыночной цене продукции предприятия. Условия достаточности второго порядка утверждают, что в этом режиме предельные издержки должны возрастать, т.е.

Итак, пусть имеется некоторый производственный набор

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\ell \end{bmatrix}$$

Моделируется выпуск однородной продукции. В качестве объема выпуска можно принять значения первой компоненты y_1; тогда все остальные будут описывать объемы производственных ресурсов. Напомним, что значения $y_h (h = \overline{2,l})$ в модели не положительны. Технологическое преобразование ресурсов в выпуск задаются аналитической функцией

$$y_1 = g(y_2, y_3, \ldots, y_\ell) \tag{29}$$

В соответствии с определением функции издержек мы должны сначала отыскать комбинацию ресурсов, которые позволяют осуществить производство заданного объема y_1 блага 1 с наименьшими издержками, т.е. максимизировать прибыль при ограничении $y_1 = \bar{y}_1$. Составим формулу прибыли:

$$P = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h. \tag{30}$$

Теперь можно сформулировать экономико-математическую модель. Требуется найти такой оптимальный производственный набор y^*, на котором

$$P(y^*) = \max_{y \in Y} \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h \tag{31}$$

при условии, что множество допустимых производственных наборов

$$Y = \{y \in E^\ell \mid g(y_2, y_3, \ldots, y_\ell) = \bar{y}_1\}$$

или, что то же самое,

$$Y = \{y \in E^\ell \mid y_1 = \bar{y}_1\}. \tag{32}$$

$\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ - векторы начальных запасов первого и второго потребителей;

$\bar{X}_{11}$ и $\bar{X}_{12}$ - начальные запасы первого и второго продуктов у первого потребителя;

$\bar{X}_{21}$ и $\bar{X}_{22}$ - начальные запасы первого и второго продуктов у второго потребителя;

б) функции полезности наборов:

для первого потребителя:

$$u_1(x_{11}x_{12}) = a_1 x_{11}^2 + 2h_1 x_{11} x_{12} + b_1 x_{12}^2 ,$$

для второго потребителя:

$$u_2(x_{21}\,x_{22}) = a_2 x_{21}^2 + 2h_2 x_{21} x_{22} + b_2 x_{22}^2 .$$

Требуется составить экономико-математическую модель рационального потребления товаров.

Решение.

Модель рационального потребления с учетом возможностей и желаний потребителей - это модель экономического равновесия. В этом состоянии потребители с наибольшей пользой для себя израсходуют свои активы, выделенные для приобретения товаров.

Модель равновесия в сфере обмена и потребления в общем случае имеет вид: $p_l = 1$;

$$\frac{u_{ih}}{p_h} = u_{il}, \quad i = \overline{1,n}\,; \quad h = \overline{1,l-1}\,;$$

$$\sum_{h=1}^{l} p_h (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) = 0, \quad i = \overline{1,n}\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) = 0, \quad h = \overline{1,l-1}.$$

для рассматриваемого случая:

$$n = 2, \quad l = 2, \quad p_2 = 1,$$

получим:

$$a_1 x_{11} + h_1 x_{12} = p_1 (h_1 x_{11} + b_1 x_{12});$$

$$a_2 x_{21} + h_2 x_{22} = p_1 (h_2 x_{21} + b_2 x_{22});$$

$$p_1 (x_{11} - \bar{x}_{11}) + x_{12} - \bar{x}_{12} = 0\,;$$

$$p_1 (x_{21} - \bar{x}_{21}) + x_{22} - \bar{x}_{22} = 0\,;$$

$$x_{11} - \bar{x}_{11} + x_{21} - \bar{x}_{21} = 0 .$$

Мы видим, что модель представляет систему из пяти алгебраических уравнений, решая которую определим значения пяти переменных:

$$g_h = \frac{\partial}{\partial y_h} g(y_2, y_3, \ldots, y_l), \quad h = \overline{2, l-1}\,,$$

называется предельной производительностью l-го ресурса. Сделаем выводы из системы уравнений (37).

Во-первых, система (37) по форме совершенно аналогична системе (25) при n=1.

Далее на основании (37) мы заключаем, что максимизация прибыли или, что то же самое, минимизация издержек при наперед заданном объеме выпуска соответствует тому, что значения отношений предельных производительностей ресурсов к ценам этих ресурсов при оптимальном режиме производства равны между собой, и в случае $p_l=1$ равны предельной производительности l-го производственного ресурса, цена которого принята за единицу счета. Таким образом,здесь так же, как и при анализе потребления, может быть определена лишь структура цен.

Теперь очень важно подчеркнуть еще и то, что мы решили задачу максимизации прибыли при наперед заданном объеме выпуска. Поэтому, на следующем этапе анализа возникает естественный вопрос: если мы имеем возможность изменять объемы выпуска, то при каком оптимальном выпуске y_1^* прибыль будет максимальна?

Экономико-математическая модель этой задачи, как впрочем и ее оптимальное решение,очевидны: требуется найти такой объем выпуска y_1^*, при котором

$$P^* = P(y_1^*) = \max_{y_1 \in Y} \; p_1 y_1 - C(y_1). \tag{38}$$

Условие первого порядка, определяющее оптимальный выпуск, требует выполнение равенства

$$\left.\frac{dC}{dy_1}\right|_{y_1^*} = p_1 . \tag{39}$$

Величина dc/dy_1 называется предельными издержками. В соответствии с общим определением предельных величин она показывает, как изменяются общие

Общая полезность X* для потребителя составит:

$$u_1^* = u_1(x_1^*) = 30x_{11}^* - 2x_{11}^{*2} + 10x_{12}^* - x_{12}^{*2} = 132 \text{ ютил.}$$

Дадим геометрическую интерпретацию выбора оптимального набора. Каждый потребительский набор содержит две компоненты, поэтому его можно изобразить точкой на плоскости, а при выбранной, скажем, прямоугольной системе координат точкой в первом квадранте. Однако, не все точки этого квадранта отражают допустимый для потребителя набор.

Множество допустимых наборов - это те наборы, которые потребитель может приобрести, но и среди них можно выделить подмножество X_1, выбор среди которых представляет конкретный интерес - получение наибольшей полезности от его приобретения.

Подмножество X_1 - это точки линии бюджетного ограничения, т.е.

$$X_1 = \{x_1 : x_1 \in E^2 \mid 3x_{11} + x_{12} = 22\},$$

где E_2 - двумерное евклидово пространство, в котором рассматриваются операции с наборами. Данное подмножество представлено на рис. 2 в виде отрезка прямой а первом квадрате.

Оптимальный набор X_1^* принадлежит линии бюджетного ограничения и обладает следующим свойством.

На этом наборе кривая безразличия, отвечавшая наибольшему уровню полезности $u_1^* = 132$ ютил, касается линии бюджетного ограничения.

Напомним, что в общем случае под кривой безразличия понимается такое множество наборов, которые доставляют потребителю один и тот же уровень полезности, т.е.

$$\{x_1 : x_1 \in E^2 \mid u_1(x_{11}, x_{12}) = const\}.$$

На рис. 2 для нашего случая приведена дуга кривой безразличия в окрестности оптимального набора:

$$\{x_1 : x_1 \in E^2 \mid u_1(x_{11}, x_{12}) = 132 \text{ ютил}\}.$$

Дуга построена по трем точкам:

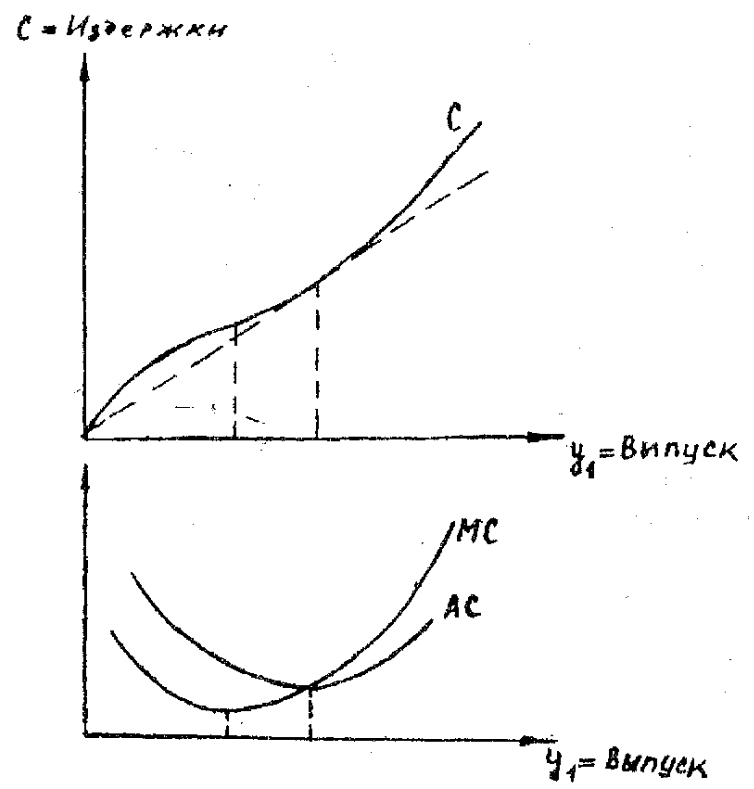

Рис. 1. Типичные кривые общих С, средних АС и предельных МС издержек на долгосрочном периоде работы предприятия.

2. Приведем краткую характеристику производственной функции и построенной на ее основе экономико-математической модели.

Производственная функция f_j для j-го предприятия $(j = \overline{1,m})$ есть действительная функция, в общем случае заданная в неявной форме, и такая, что

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jl}) = 0, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{40}$$

если производственные наборы y_j являются технологически эффективными, и такая, что где $X_1^* = \begin{bmatrix} X_{11}^* \\ X_{12}^* \end{bmatrix}$ - потребительский набор; $u_{11}(x_1^*)$, $u_{12}(x_1^*)$ - предельные полезности первого и второго на наборе x_1^*.

В нашем случае уравнения примут вид:

$$\frac{u_{11}(x_{11}^* \; x_{12}^*)}{2} = u_{12}(x_{11}^* \; x_{12}^*); \quad 2x_{11}^* + x_{12}^* = 12.$$

Первому уравнению удовлетворяют все потребительские наборы с равным количеством первого и второго благ. Среди них надо выбрать такой, чтобы удовлетворялось второе уравнение. Поскольку для оптимального набора из первого уравнения мы имеем, что

$x_{11}^* = x_{12}^*$,

то из второго уравнения получаем, что

$x_{11}^* = 4$; $x_{12}^* = 4$; $u_1(4,4) = 510$ ютил.

Ответ:

$$X_1^* = \begin{bmatrix} 4 \text{ ед.} \\ 4 \text{ ед.} \end{bmatrix}; \qquad u_1(X_1^*) = 510 \text{ ютил.}$$

Задача 2.

Пусть $u_{11} = 10 - C_1$, а $u_{12} = 21 - 2C_2$,

где u_{11} и u_{12} - это предельные полезности, измеренные в ютилях;

C_1 и C_2 - стоимости товаров первого и второго видов.

Предположим, что потребитель собирается потратить на эти товары 10 дол. Как лучшие всего распределить деньги на покупку товаров? Какова будет величина полезности, принесенная предельным (десятым) долларом при покупке каждого из них?

Решение.

Оптимальное распределение выделенных денег на приобретение товаров первого и второго видов должно подчиняться условиям:

$$\frac{10 - C_1^*}{C_1^*} = \frac{21 - 2C_2^*}{C_2^*};$$

$$C_1^* + C_2^* = 10.$$

Решая эти два уравнения относительно C_1^* и C_2^*, получим:

$C_1^* = 4$ дол., $C_2^* = 6$ дол.,

- приобретение ресурсов и реализация выпусков на рынках совершенной конкуренции.

Формализация этих правил и требований и определяет нам экономико-математическую модель рациональной организации производства

$$P = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{\ell} P_h \, y_{jh};$$

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{j\ell}) = 0, \qquad j = \overline{1, m}; \qquad (45)$$

$$\frac{\partial f_j}{P_h \partial y_{jh}} = \frac{\partial f_j}{\partial y_{j\ell}}, \qquad j = \overline{1, m}, \; h = \overline{1, \ell - 1}.$$

Подчеркнем, что в этой модели цены определяются экзогенно по отношению к производству, рассматриваемому как подсистема при декомпозиции проблемы рационального ведения хозяйства.

В следующем параграфе данного раздела мы снимем это ограничение и будем рассматривать цены как эндогенные величины, т.е. подлежащие определению внутри самой проблемы рационального ведения хозяйства. Определяемые таким образом цены, как впрочем, и оптимальные потребительские и производственные наборы, получим с помощью модели общего экономического равновесия.

2.4. Модель общего экономического равновесия

По-прежнему экономика включает в себя n потребителей с неизвестными функциями полезности, m производств с известными производственными функциями, l благ, включающих как предметы потребления, так и производственные ресурсы. Рассматривается экономика обмена, а не распределение благ из общего для экономики распределителя или некоторого управляющего центра. С целью обмена (приобретения и продажи) организованы рынки. При анализе предполагаем, что действуют условия совершенной конкуренции. Требуется описать такую экономическую систему в состоянии

3. ПРИМЕРЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА ПРОБЛЕМЫ РАЦИОНАЛЬНОГО ВЕДЕНИЯ ХОЗЯЙСТВА

3.1. Общая характеристика примеров

В настоящем разделе даны примеры системного анализа конкретных ситуаций рациональной организации потребления и обмена, производства, а также потребления, обмена и производства одновременно. Цель приведенных примеров – помочь студенту заочного обучения усвоить достаточно сложный для него теоретический материал предшествующего раздела. При построении примеров мы исходим из того, что использование теоретических результатов системного анализа в практике хозяйствования допускает различные способы задания исходных характеристик, в частности, характеристик предпочтения потребителей или технологий предприятий. Основными из них являются табличное или аналитическое задание характеристик. И тот и другой способы будут разобраны в приводимых ниже примерах.

Известно, что более успешному усвоению алгоритмов системного анализа способствует, если это возможно, геометрическая интерпретация поиска решения. При анализе потребления, обмена и производства такая интерпретация становится возможной, если наборы, будь это потребительские или производственные, включают только два вида компонентов. Поэтому именно с такими наборами мы встречаемся в тех примерах, в которых разбирается и геометрическая интерпретация поиска оптимального решения.

3.2. Примеры моделей рационального потребления

Задача 1.

Данные об общей полезности различного количества двух благ для потребителя 1 приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Количество блага, ед.	Полезность первого блага, ютил		Полезность второго блага, ютил	
	общая	предельная	общая	предельная

В дополнение к этим уже используемым ранее параметрам и функциям введем еще в качестве исходных данных коэффициенты α_i, определяющие доли общей прибыли, приходящиеся на каждого потребителя системы. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \qquad \alpha_i \geq 0,$$

т.е. некоторые из значений коэффициентов α_i могут быть равны нулю.

Введем переменные величины:

- потребительские наборы

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{il} \end{bmatrix};$$

- производственные наборы

$$y_j = \begin{bmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ \vdots \\ y_{jl} \end{bmatrix};$$

- рыночные цены благ $P = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$;
- общая прибыль в системе P.

В модель общего равновесия в качестве ее составляющих без каких-либо изменений следует включить систему уравнений (25), а также систему уравнений (43). Вместе с тем системы (26) и (27), являющиеся частью модели потребления, а точнее определяющие равенства величин индивидуальных спроса и предложения (26) и равенства объемов покупок и продаж (27) требуют при их включении в модель общего равновесия определенной коррекции.

Скорректируем систему (26). Величина индивидуального спроса по-прежнему будет определяться как

$$Д_i = \sum_{h=1}^{l} p_h x_{ih}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

В то же время возможности потребителей, которые определяют их бюджет, выделенный на удовлетворение данного спроса ввиду наличия организованных производств, изменятся на величину бюджета, равного $\alpha_i P$, где P – общая

Таблица 3

Вариант	*a*	*b*	*c*	*d*
0	60	0,5	600	0,25
I	70	0,4	1000	0,3
2	78	0,3	1000	0,35
3	60	0,2	500	0,4
4	150	I	2000	0,5
5	120	I	1000	I
6	140	0,8	2000	0,6
7	104	0,6	1000	0,7
8	174	0,9	3000	0,55
9	75	0,5	125	0,75

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубров А.М.,Лагоша Б.А.,Хрусталева Е.Ю.,Барановская Т.П. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе.-М.;Финансы и статистика,2001.
2. Гребнев Л.С.,Нуреев Р.М. Экономика.-М.: ВИТА, 2000.
3. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбергов Д.М. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели.- М.:ЮНИТИ, 1999.
4. Губин Н.М., Добронравов А.С., Дорохов Б.С. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи. - М.: Радио и связь, 1993.
5. Овчинников Г.П. Макроэкономика . ЛЭИС. - СПб.; 1993.
6. Овчинников Г.П. Микроэкономика. - СПб.: ТОО "СВАН", 1992.
7. Черняк Ю.И. Системный анализ в управлении экономикой. - М.: Экономика, 1989

План УМД 2004/2005 уч. года

Методические указания и
задания к контрольной работе

по дисциплине

Методы и модели в экономике

Составители: Добронравов А.С.
Дорохов Б.С.

Рецензент Демина Е.В., проф., к.т.н.

Утверждено на заседании кафедры ОПАБУ
Протокол №2 от 9.10.2003 г.

представлена для зачета. Если работа зачтена, но содержит замечания рецензента, их следует учесть и внести в работу соответствующие изменения.

Результаты контрольной работы обсуждаются на экзамене.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИНЦИПЫ И ПРОБЛЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

1.1 Определение моделирования

Экономико-математическое моделирование – это научная дисциплина, созданная для комплексного исследования сложных процессов и проблем посредством представления их в качестве подсистем и составляющих проблему ряда задач с последующим анализом подсистем или задач. В целом это означает, что предмет исследования рассматривается не как единое целое, а как система взаимосвязанных составных частей, их свойств, качеств.

Соответственно моделирование в экономике сводится к исследованию сложных, как правило, организационных систем или проблем, их представлений в виде ряда подсистем или задач, решаемых с помощью экономико-математических методов. При этом определяются критерии и способы решения, проводится детализация и формализация целей, строятся модели эффективных организаций для достижения целей. Моделирование проводится в несколько этапов. Главные из них следующие.

Первый этап – постановка проблемы – определение объекта исследования, разработка целей, выделение главных, формирование критериев и систем ограничений.

Среди многообразия проблем, решаемых на основе моделирования, в прикладных экономических исследованиях выделяют так называемую главную экономическую проблему – получение наилучшего результата при ограниченных ресурсах. Решается эта проблема с помощью оптимизационных моделей. При этом оптимум в экономике ввиду ограниченности ресурсов всегда условлен. При поиске оптимума широко используются методы математического программирования.

Второй этап – выделение системы, подлежащей изучению, и ее структуризация. Смысл этого этапа моделирования в том, что вся совокупность объектов и процессов, имеющих отношение к поставленной проблеме, прежде

Окончание табл. 1

Вари-ант	a_1	a_2	b_1	b_2	p_1, тыс.р./ед.	R_1, тыс.р.
6	90	50	4	2	5	62
7	56	40	3	2	4	24
8	27	45	2	4	3	14
9	20	75	1	6	2	20

Задача 2.

На предприятии организован выпуск однородной товарной продукции, которая поступает на рынок чистой конкуренции. Возможности предприятия позволяют обеспечить такой объем выпуска, при котором достигается наибольшая прибыль.

Известно:

функция издержек предприятия

$$C(q) = aq^3 - bq^2 + dq \quad ; \text{тыс.р.};$$

рыночная цена товарной продукции р.

Определите оптимальный объем выпуска,обеспечивающий наибольшую прибыль предприятию, величину этой прибыли. Дайте геометрическую интерпретацию решения, для чего постройте кривые:

- общих издержек С , дохода R и прибыли Р в зависимости от объемов выпуска (верхний график);
- средних АС и предельных МС издержек;
- среднего AR и предельного MR доходов (нижний график), покажите на нижнем графике расчет общей прибыли при оптимальном режиме производства.

Исходные данные приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вариант	a	b	d	p ; тыс.р./ед.
0	1/270	2/3	52	48
1	4/270	4/3	48	30
2	4/750	4/5	60	50
3	3/160	9/8	50	45
4	1/120	1	52	35

При разумном выборе можно достичь определенных целей, не превышая пределов, обусловленных ограниченностью ресурсов. Задачи, решаемые в рамках поставленной проблемы, весьма и весьма разнообразны. Это задачи как макро -, так и микроэкономики. С позиции же моделирования проблема рационального ведения хозяйства рассматривается с точки зрения применения к экономике методов экономической оптимизации.

Задачи математической оптимизации в данных указаниях сформулированы как определение таких значений некоторых переменных величин, удовлетворяющих ряду ограничений, при которых в зависимости от выбранного критерия достигается максимум или минимум определенной функции, называемой в анализе целевой функцией, т.е. рассматривается лишь задача скалярной, а не векторной оптимизации. Будут рассматриваться проблемы и объекты микроэкономики, в рамках которой изучают, как ограниченные ресурсы используются для удовлетворения потребностей людей, предметом же исследования будем считать основные операции – производство, распределение, обмен и потребление услуг, называемых в дальнейшем благами, а также организационные структуры и процессы, преследующие цель облегчить эти операции.

В процессе моделирования осуществляют структуризацию поставленной проблемы. Для этого прежде всего выделяют две основные задачи:

- анализ поведения участников микроэкономического процесса, обладающих экономической свободой и свободой выбора, но подчиняющихся ограничениям, налагаемым на них природой и обществом;
- выбор наилучших форм организации производства, распределения, обмена и потребления, а также сравнения различных форм организации.

  При решении этих двух задач системный анализ отводит центральное место цене, которая играет определяющую роль при обмене благ между участниками экономического процесса.

Значимость цены определяется тем, что для индивидуума она определяет общественную ценность или редкость продуктов, которые он продает или покупает. Следовательно, изучение системы цен так же необходимо, как и изучение рационального производства и потребления.

Теперь можно уточнить основную цель исследования проблемы рационального хозяйства – анализ одновременного установления как цен, так и

$$y_1^* = \begin{bmatrix} y_{11}^* \\ y_{12}^* \\ y_{13}^* \end{bmatrix},$$

где в соответствии с общей теорией равновесия компоненты набора y_{13} принимают положительные, а y_{11}^* и y_{12}^* отрицательные значения. Должно выполняться технологическое требование:

$$y_{11}^* \, y_{12}^* - a y_{13}^* = 0 . \qquad (5)$$

Условие достижения наибольшей прибыли при оптимальном режиме в соответствии с моделью (48) для нашего случая примет вид:

$$\frac{f_{11}}{p_1} = f_{13} \quad \text{и} \quad \frac{f_{12}}{p_2} = f_{13}$$

или с учетом исходных данных

$$y_{12}^* + a p_1 = 0 ; \qquad (6)$$

$$y_{11}^* + a p_2 = 0 , \qquad (7)$$

а само значение наибольшей прибыли будет равно

$$P = y_{13}^* + p_1 y_{11}^* + p_2 y_{12}^* . \qquad (8)$$

Учтите, что значения $y_{11}^* < 0$ и $y_{12}^* < 0$, так что это обычная формула прибыли,

Доходы y_{13}^* - расходы $(-p_1 y_{11}^* - p_2 y_{12}^*)$. Наконец, в состоянии общего равновесия должно иметь место рыночное равновесие на первом и втором конкурентных рынках. При этом на третьем рынке рыночное равновесие будет иметь место автоматически. Таким образом, получаем еще два уравнения:

$$y_{11}^* = x_{21}^* - \bar{x}_{11} ; \qquad (9)$$

$$y_{12}^* = x_{12}^* - \bar{x}_{22} . \qquad (10)$$

Итак, для описания общего экономического равновесия нами получена система из десяти уравнений. Выпишем переменные, входящие в систему:

$$\begin{array}{cccccc} & & y_{11}^* & & & \\ x_{11}^* & x_{21}^* & y_{12}^* & & & \\ x_{13}^* & x_{23}^* & y_{13}^* & P^* & p_1 & p_2 . \end{array}$$

Итак, мы имеем систему десяти уравнений с десятью неизвестными.

В заключение отметим, что даже для такого простого случая (n=2, m=1, l=3), мы получили весьма сложную систему уравнений с точки зрения получения общего благ. Для потребителя – это потребительский, для производителя – производственный наборы. Набор благ есть совокупность некоторых количеств каждого из l благ.

При анализе микроэкономического процесса предполагаем наличие такой организации экономической деятельности, которая позволяет индивидуумам обмениваться благами. Понять, как производится обмен при рациональном ведении хозяйства – одна из основных задач системного анализа на третьем этапе его использования. На конкретных примерах, приведенных в данной работе, мы покажем, что обмен благами производится в соответствии с ценами на них, т.е. каждому благу соответствует цена p_h, а набору благ z его стоимость

$$p\,z = \sum_{h=1}^{\lambda} p_h z_h , \qquad (1)$$

где z_h – количество h-го блага.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ M \\ z_\lambda \end{bmatrix}, \qquad p = [p_1, p_2, \Lambda, p_\lambda].$$

2. Потребитель, место которого в исследуемой системе будем обозначать целочисленной переменной i $(i=1,2,\dots,n)$. Поведение потребителя определим набором

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ M \\ x_{i\lambda} \end{bmatrix},$$

компоненты которого x_{ih} соответствуют количеству различных потребляемых благ. Значения x_{ih} не всегда положительны. Часто предполагают, например, что потребитель j выполняет работу определенного вида. Эту работу представляют как отрицательное потребление блага, соответствующего работе данного вида.

3. Производитель, место которого в исследуемой системе обозначим целочисленной переменной j $(j=1,2,\dots,m)$. Поведение производителя j определяется преобразованием некоторых благ, которые мы будем называть ресурсами, в другие блага, называемые выпускаемой продукцией или просто выпусками.

Пусть

Требуется составить экономико-математическую модель общего экономического равновесия.

Решение.

В соответствии с общей теорией системного подхода к решению проблемы рационального ведения хозяйства в состоянии равновесия индивидуумы с учетом своих возможностей и предпочтений должны приобрести потребительские наборы, доставляющие им наибольшую полезность.

По условию задачи приобретают они эти товары на двух рынках каждый: первый на втором и третьем, второй на первом и третьем рынках, поскольку по условию задачи

$$x_{11}^{*} = 0 \quad \text{и} \quad x_{22}^{*} = 0,$$

т.е. потребители не предъявляют спроса на соответствующие товары. Обозначим потребительские наборы в состоянии равновесия

$$x_1^{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{12}^{*} \\ x_{13}^{*} \end{bmatrix}, \quad x_2^{*} = \begin{bmatrix} x_{21}^{*} \\ 0 \\ x_{23}^{*} \end{bmatrix},$$

где x_{ih}^{*} –

количество товаров h-го вида у i-го потребителя.

Воспользовавшись моделью общего равновесия (48) применительно к нашему случаев (h=2, l=3, m=1) и учитывая особенности поведения потребителей, состояние равновесия можно охарактеризовать уравнениями:

для первого потребителя

$$\frac{u_{12}}{p_2} = u_{13} ;$$

для второго потребителя

$$\frac{u_{21}}{p_1} = u_{23} ,$$

где p_1, p_2 – рыночные цены товаров первого и второго видов, а цену третьего товара мы приняли в соответствии с общей теорией, равной единице, т.е. $p_3 = 1$; $u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{23}$ – предельные полезности продуктов для потребителей.

С учетом известных функций полезности определяем предельные полезности:

определено, если заданы n векторов x_i и m векторов y_j. Поскольку при системном анализе одна из основных целей при решении проблемы рационального ведения хозяйства-это решение задачи об установлении цен, то при описании состояния экономики необходимо ввести вектор цен p. Заметим, что этот вектор в формализациях будет вводиться как вектор строка. Такое задание цен при математическом описании проблемы согласуется с правилами линейной алгебры, в частности, при определении стоимости наборов или оценке доходов, издержек, прибыли и других экономических величин.

На основе описанных выше элементов возможна дальнейшая детализация целей в рамках поставленной проблемы, а именно, можно считать, что системный анализ имеет два вида целей.

Во-первых, необходимо иметь возможность анализа поведения участников экономического процесса. С формальной точки зрения это означает, что должны быть созданы модели, с помощью которых объясняется, как каждый потребитель i определяет x_i и как каждый производитель j определяет y_j. Кроме того, эти же модели должны также описывать и цены p_n, устанавливаемые на рынках благ. Рынков столько, сколько благ, т.е. рассматривается l рынков.

Во-вторых, необходим анализ того, какой будет оптимальная организация производства, потребления и обмена, что в свою очередь, позволит с системных позиций исследовать свойства состояния экономики, при которых реализуется эта оптимальная организация. Очень важно отдавать себе отчет в том, что введенные в рассмотрение средствами системного анализа проблемы рационального ведения хозяйства, основные элементы – блага, потребители и производители с их наборами благ, а также цены, устанавливаемые на рынках, не обладают свойством полноты описания проблемы в целом. Например, нельзя построить модель экономики с учетом внешней торговли. Кроме того, в моделях не будут рассматриваться управление, роль государства, кредитно-финансовые отношения и пр. Эти ограничения продиктованы тем, что нельзя в изложении учебного материала вводить сразу все, не рискуя при этом запутать студентов. Однако, это не уменьшает полезности от изучения алгоритмов системного подхода к таким образом поставленной проблеме, поскольку они позволяют производить достаточно строгий анализ основных явлений и основных вопросов экономики, касающихся производства и потребления благ. В результате изучения этих алгоритмов студент усвоит рекомендации, которые часто становятся

где p(q) - спрос на товар монополиста.

При оптимальном выпуске q* предельный доход должен равняться предельным издержкам, т.е.

$$MR(q^*) = MC(q^*),$$

с учетом исходных данных, получим

$$\frac{d}{dq}(40-q)q\Big|_{q^*} = \frac{d}{dq}(50+q^2)\Big|_{q^*},$$

откуда $q^* = 10$ ед., а соответствующая этому выпуску цена

$$p = p(q^*) = 40 - 10 = 30 \text{ тыс.р./ед.}$$

Общий доход

$$R(q^*) = pq^* = 300 \text{ тыс.р.}$$

Общие издержки

$$C(q^*) = (50 + 100) = 150 \text{ тыс.р.}$$

Средние издержки

$$AC(q^*) = \frac{C(q^*)}{q^*} = 15 \text{ тыс.р./ед.}$$

Общая прибыль

$$P(q^*) = R(q^*) - C(q^*) = 150 \text{ тыс.р.}$$

Средняя прибыль

$$AP(q^*) = \frac{P(q^*)}{q^*} = 15 \text{ тыс.р./ед.}$$

Для определения коэффициента ценовой эластичности определим предельные издержки

$$MC(q^*) = \frac{dC}{dq}\Big|_{q^*} = 2q^* = 20 \text{ тыс.р./ед.}$$

При оптимальном режиме справедливо соотношение

$$p = \frac{MC(q^*)}{1 + 1/\varepsilon_p(q^*)}.$$

Разрешая это уравнение относительно Ep (q*), получим

$$\varepsilon_p(q^*) = \frac{p}{MC(q^*) - p}$$

или

$$\varepsilon_p(10) = \frac{30}{20 - 30} = -3,$$

ограниченным доходом R_i для определенного потребителя i, выделенного на приобретение благ.

Приобретает потребитель предметы потребления на рынках благ, на которых каждое благо имеет вполне определенную цену p_h.

Таким образом, набор доступен, если его стоимость не превосходит дохода потребителя.

$$p_{xi} = \sum_{h=1}^{\lambda} p_h x_{ih} \le R_i, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (4)$$

Если считать, что заданы начальные запасы благ для каждого i -го потребителя, то его доход можно представить в виде

$$R_i = \sum_{h=1}^{\lambda} p_h \bar{x}_{ih}, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (5)$$

Предпочтения потребителей между различными наборами, которые удовлетворяют их потребностям при современном моделировании потребления, представляются функциями полезности или функциями удовлетворения:

$u_i(x_{i1}, x_{i2}, K, x_{i\lambda})$,

т.е. эти функции предназначены для индивидуальной характеристики поведения того или иного потребителя. Каждый потребитель стремится в силу своих возможностей максимизировать функцию полезности u_i. Считается, что эта функция определена на множествах допустимых наборов для каждого потребителя $\mathbf{X}_i$. Для упорядочения наборов вводят отношения предпочтительности. Набор $x_i^{(1)}$ предпочтительней набора $x_i^{(2)}$ для i -го потребителя, если

$$u_i(x_{i1}^{(1)}, x_{i2}^{(1)}, \dots, x_{il}^{(1)}) > u_i(x_{i1}^{(2)}, x_{i2}^{(2)}, \dots, x_{il}^{(2)}). \qquad (6)$$

Математическая модель рационального потребления теперь может быть сформулирована следующим образом: найти такой оптимальный набор x_i^*, на котором

$$u_i(x_i^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \qquad (7)$$

при условии, что множество допустимых наборов определяется системой неравенств:

$$X_i = \{x_i \in E^n \mid \sum_{h=1}^{\lambda} p_h x_{ih} \le R_i,\ i = \overline{1,n}\}, \qquad (8)$$

$$C(q^*) = \frac{1}{120}(q^*)^3 - (q^*)^2 + 50q^* \quad = 1458{,}3 \text{ тыс.р.}$$

Средние издержки

$$AC(q^*) = \frac{C(q^*)}{q^*} = 20{,}8 \text{ тыс.р./ед.}$$

Общая прибыль

$$P(q^*) = R(q^*) - C(q^*) = 816{,}7 \text{ тыс.р.}$$

Средняя прибыль

$$AP(q^*) = \frac{P(q^*)}{q^*} = 11{,}7 \text{ тыс.р./ед.}$$

На рис. 5 приведен графический расчет оптимального режима. Заштрихованная область определяет величину общей прибыли -P (q^*).

Задача 10.

Предприятие-монополист выпускает однородную продукцию.

Известно:

функция спроса на товарную продукцию монополиста

$p(q) = 40 - q$;

функция издержек

$c(q) = 50 + q^2$;

предприятие в состоянии организовать оптимальный режим производства.

его решения. и если по данной системе цен потребитель может приобрести все необходимое количество благ в пределах, конечно, его возможностей и соразмерно его желаниям. В противном случае, если цена p зависит от набора x_i, то это неконкурентные рынки, т.е. следует рассматривать иные базовые структуры рынков – монополистическую конкуренцию, олигопсонию, монопсонию. Такие структуры несовершенной конкуренции при системном подходе к проблеме рационального потребления рассматриваться не будут. Одну из таких структур несовершенной конкуренции, но применительно к изучению рациональной организации производства, монополию, мы рассмотрим ниже.

Итак, в соответствии с поставленной задачей рационального потребления, пользуясь принципом подобия, лежащего в основе всякого, а не только математического моделирования, нами построена экономико-математическая модель (7), (9), оптимальное решение которой, если оно существует, позволит определить набор, доставляющий потребителю наибольшую полезность. При этом однако, следует считать, что цены загаданы экзогенно по отношению к описанию поведения, т.е. определяются не каждым отдельно взятым потребителем, а совокупными спросом и предложением на рынках благ, т.е. рыночным спросом и рыночным предложением. В состоянии равновесия на каждом рынке, а их всего l, должно иметь место равенство объемов покупок и продаж. Рыночная стоимость объема покупок равна $p_h x_h$, где x_h -общее количество блага x, купленного на h -м рынке:

$$x_h = \sum_{i=1}^{h} x_{ih}, \quad h = \overline{1,\lambda}. \tag{10}$$

Следовательно, стоимость объема покупок

$$p_h x_h = p_h \sum_{i=1}^{h} x_{ih}, \quad h = \overline{1,\lambda}. \tag{11}$$

Стоимость объема предложений на этом же рынке–это стоимость начальных запасов h -го блага (3), т.е.

$$p_h \bar{x}_h = p_h \sum_{i=1}^{h} \bar{x}_{ih}, \quad h = \overline{1,\lambda}. \tag{12}$$

Таким образом, для характеристики состояния рыночного равновесия имеем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{h} (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) = 0, \quad h = \overline{1,\lambda}. \tag{13}$$

Это очень важный для экономистов вывод. Мы видим, что формула справедлива независимо от того, какова структура рынков; либо это чистая конкуренция, либо монополия (монопсония), либо олигополия. Вместе с тем следует отчетливо себе представлять, что соотношения между издержками и рыночной ценой при различных структурах рынка совершенно различны.

Напомним, что на оптимальном режиме при чистой конкуренции

$$MC(q^*) = p,$$

а при монополии

$$MC(q^*) = p + \frac{dp}{dq}\bigg|_{q^*} q^* = p + p\,\frac{q^*}{p}\frac{dp}{dq}\bigg|_{q^*} = p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_p(q^*)}\right),$$

где $\varepsilon_p(q^*) = \dfrac{dq/q}{dp/p}\bigg|_{q^*}$ - коэффициент ценовой эластичности

спроса на продукцию монополиста в состоянии равновесия.

Итак, получили следующее правило для максимизации прибыли производителя-монополиста.

Он устанавливает цены на основании формулы

$$p = \frac{MC(q^*)}{1 + 1/\varepsilon_p(q^*)}.$$

Например, если коэффициент ценовой эластичности спроса $\varepsilon_p(q^*) = -4$, а $MC(q^*) =$ 9 тыс.р./ед., то цена

$$p = \frac{9}{1 - 1/4} = 12 \text{ тыс.р./ед.}$$

Сравнение монополии и чистой конкуренции показывает, что монополист назначает более высокую цену, превышающую предельные издержки в первом приближении на величину, обратно пропорциональную ценовой эластичности спроса. В частности, если спрос чрезвычайно эластичен

$\varepsilon_p(q) >> 1$,

то рыночная цена будет стремиться к предельным издержкам, и таким образом монополизированный рынок будет очень похож на рынок чистой конкуренции, и как результат, если спрос очень эластичен, то монополисту достается незначительная прибыль.

На рис. 4 представлена геометрическая интерпретация определения оптимального режима работы предприятия-монополиста через доход и функции издержек.

Экономический смысл оптимальных значений Лагранжа объяснялся в курсе ЭММ. Напомним, что эти значения определяют, на сколько изменится полезность набора для i-го потребителя, если выделенный для этой покупки доход потребителя R_i изменится на единицу. Итак, получим систему:

$$\frac{\partial}{\partial x_{ih}} u_i^*(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ih}) - \lambda_i p_h = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad h = \overline{1,\lambda}; \tag{17}$$

$$\sum_{h=1}^{\lambda} p_h x_{ih} = R_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{18}$$

С учетом (5) и вводя обозначения

$$U_{ih} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ih}}, \tag{19}$$

систему (17)и (18) можно записать в следующем виде:

$$u_{ih} - \lambda_i p_h = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad h = \overline{1,\lambda}; \tag{20}$$

$$\sum_{h=1}^{\lambda} p_h \left(x_{ih} - \overline{x_{ih}}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{21}$$

В рамках поставленной задачи нам не требуется определять значения множителей Лагранжа. Поэтому систему уравнений (20) преобразуют: разрешают относительно λ_i, при $h=1$ получим

$$\lambda_i = \frac{u_{i\lambda}}{p_\lambda}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{22}$$

и записывают в виде:

$$\frac{u_{ih}}{p_h} = \frac{u_{i\lambda}}{p_\lambda}, \quad i = \overline{1,n}, \quad h = \overline{1,\lambda-1}. \tag{23}$$

Далее можно заметить, что цены в модели определяются для равновесия состояния с точностью до последнего множителя. Действительно, если все цены p_h умножить на какое-либо число α, то модель (13), (21), (23) останется прежней. В свою очередь, это означает, что оптимальное (равновесное) решение задачи определяет лишь структуру равновесных цен, т.е. относительные цены благ, в предположении, что цена какого-либо блага принята за единицу. Для определенности можно принять, что $p_l=1$. Формально это значит, что множитель α мы принимаем равным $1/P_l$, тогда при принятых обозначениях определяются относительно ценности l-го блага:

$$MR(q) < p,$$

т.е. в случае монополии предельный доход оказывается меньше цены.

Предприятие, выступая на рынках производственных ресурсов, является также и монопсонистом, т.е. может влиять на цену путем изменения объемов закупок того или иного вида ресурсов, т.е.

$$W_k = W(k), \qquad W_l = W(l).$$

Известно, что нормальная организация таких производственных рынков такова, что предприятие может покупать большее количество факторов производства, а значит выпускать и большие объемы продукции, только предложив более высокую плату за них, так как по существу при этом растет спрос на производственные ресурсы.

Таким образом:

$$\frac{dw_k}{dk} > 0; \qquad \frac{dw_l}{dl} > 0.$$

Поскольку стоимость затрат капитала и труда можно представить в виде

$$C_k = w_k(k)\,k, \qquad C_l = w_l(l)\,l,$$

а предельная стоимость затрат отражает по общему определению изменения в стоимости этих затрат при увеличении на количества:

$$MC_k = \frac{dC_k}{dk} = w_k + \frac{dw_k}{dk}\,k;$$

$$MC_l = \frac{dC_l}{dl} = w_l + \frac{dw_l}{dl}\,l,$$

то в случае монопсонии предельная стоимость затрат ресурсов превышает их оплату.

Экономико-математическая модель рациональной организации производства в условиях несовершенной конкуренции примет следующий вид.

Требуется найти такой оптимальный производственный набор

$$\begin{bmatrix} q^* \\ k^* \\ l^* \end{bmatrix},$$

на котором прибыль

$$P(q^*, k^*, l^*) = \max_{q,k,l} \left[p(q)q - w_k(k)k - w_l(l)\,l\right]$$

при условии

$$q = q(k, l),$$

где q (k, l) - известная производственная функция.

системы уравнений. Однако, модель дает нам мощный инструмент для системного анализа рационального поведения потребителей.

В заключение раскроем экономический смысл систем уравнений модели рационального потребления.

В систему уравнений (25) входит формально определенная величина u_{ih}, которая вычисляется по формуле (19). В соответствии с определениями математического анализа подобные величины называют предельными величинами. Применительно к нашей задаче эта величина называется предельной полезностью h-го блага для i-го потребителя. Значение предельной полезности на оптимальном наборе показывает, на сколько изменится полезность набора для i-го потребителя, если в нем изменить количество h-го блага на единицу, в предположении, что это единица очень мала, а в пределе стремится к нулю.

Вводя в модель предельные величины, а это и множитель Лагранжа, и предельная полезность, надо подчеркнуть их особую роль в оптимизационных моделях. С помощью этих величин моделируют в общем случае переход из одного состояния в другое, а это необходимая операция в моделях целенаправленного выбора, на которой, в частности, и стоится решение проблемы рационального потребления.

Итак, система (25) показывает, что на оптимальном наборе x_i^* для i-го потребителя отношения предельных полезностей благ к цене этих благ должны быть равными между собой и равняться предельной полезности l-го блага. Иногда величину u_{il} называют в анализе предельной полезностью денег для l-го потребителя. Заметим, что это условие вполне согласуется со свойством 2°, которым обладает всякая функция полезности, вводимая в модель рационального потребления. Смысл системы (26) вполне очевиден. Эта модель отражает тот факт, что в состоянии равновесия величина индивидуального спроса в денежном выражении со стороны каждого i-го потребителя должна равняться денежной величине его предложения или, что то же самое, его доходу (бюджету), выделенному для приобретения набора, доставляющего ему максимальную полезность. Заметим, что это условие также вполне согласуется со свойством 1°, которым обладает всякая функция полезности, вводимая в модель рационального потребления.

Заметим, что предельный доход, впрочем, как и средний доход предприятия

$$MR = \frac{dR}{dq}, \text{ а } AR = \frac{R}{q},$$

в условиях чистой конкуренции равны рыночной цене продукции, т.е.

$$MR(q) = AR(q) = p.$$

С учетом этого замечания заключаем, что при максимальной прибыли оптимальное значение множителя Лагранжа

$$\lambda^* = MR,$$

а следовательно, из системы уравнений получаем

$$MRP_k = MR \cdot MP_k = w_k;$$

$$MRP_l = MR \cdot MP_l = w_l,$$

где MRP_k и MRP_l - так называемые предельные продуктивности (производительности) затрат капитала и труда соответственно.

По определению:

предельные издержки капитала

$$MC_k = \frac{\partial C}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(w_k k + w_l l) = w_k.$$

Предельные издержки труда

$$MC_l = \frac{\partial C}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}(w_k k + w_l l) = w_l,$$

а значит можно записать

$$MR = \frac{MC_k}{MP_k} = \frac{MC_l}{MP_l}.$$

Вместе с тем

$$\frac{MC_k}{MP_k} = \frac{\partial C/\partial k}{\partial q/\partial k} = \frac{dC}{dq} = MC(q);$$

$$\frac{MC_l}{MP_l} = \frac{\partial C/\partial l}{\partial q/\partial l} = \frac{dC}{dq} = MC(q).$$

В итоге получим, что необходимое условие оптимального режима по-прежнему сводится к тому, чтобы предельные издержки равнялись предельному доходу, т.е.

$$MR(q^*) = MC(q^*),$$

а поскольку

$$MR(q) = p,$$

другими. Рациональная же организация предполагает исключение из множества допустимых наборов таких экономически невыгодных процессов. В этом случае говорят, что допускаются к рассмотрению только такие наборы, которые являются технологически эффективными. Применение таких наборов означает, что технологические преобразования нельзя модифицировать таким образом, чтобы получить больше какого-либо выпуска без снижения производственного потребления какого-либо ресурса, либо повышения объема другого выпуска.

Формально вектор $y_j^{(1)}$ называется технологически эффективным, если он принадлежит множеству допустимых производственных наборов Y_j и если в Y_j не существует другого вектора $y_j^{(2)}$, такого, что

$$y_{jh}^{(2)} \geq y_{jh}^{(1)}, \quad h = \overline{1, l}. \tag{28}$$

При современном моделировании экономической деятельности предприятий различают два основных подхода при системном описании технологических ограничений:

1) использование функций издержек;
2) использование производственных функций.

1. Приведем краткую характеристику первого подхода. Функция издержек – это зависимость, которая ставит в соответствие произведенному количеству выпуска минимальное значение затрат, ресурсов, позволяющих осуществить этот объем выпуска продукции.

Практика показала, что анализ организации отдельно взятого производства на основе функций издержек в целом проще, чем применение аппарата производственных функций.

Построим алгоритм для рациональной организации производства однородной продукции. В качестве критерия такой организации предположим, что производитель стремится максимально увеличить прибыль в условиях заданных технологических ограничений. Введение такого критерия неоднократно являлось объектом критики, однако в противоположность ему не было предложено ни одного альтернативного критерия, которые бы успешно использовались в моделях рационального производства с множеством предприятий.

Поскольку, мы считаем, что предприятие одно (m=1), то при дальнейшем изложении индекс можно при рассмотрении данного случая опустить.

$$\left.\frac{d^2C}{dq^2}\right|_{q^*} > 0.$$

На рис. 3 представлена геометрическая интерпретация определения оптимального режима через доход и функции издержек.

На этом же рисунке построены и соответствующие общим издержкам кривые средних и предельных издержек производства.

Напомним, что средние издержки

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

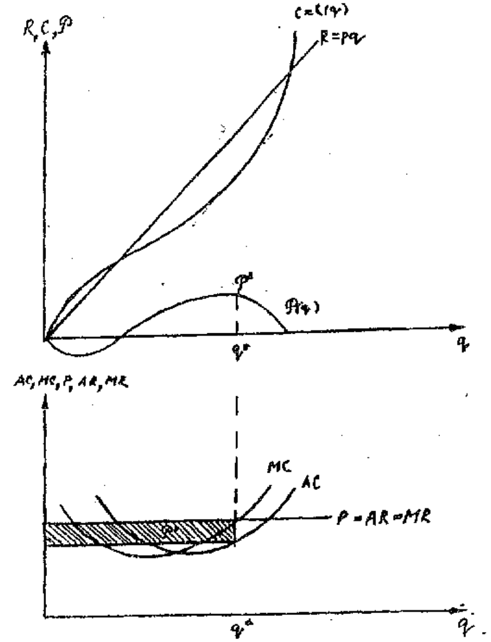

Рис. 3. Оптимальный режим работы предприятия при чистой конкуренции

Задача 7.

Предприятие в условиях чистой конкуренции выпускает однородную продукцию, используя два вида ресурсов - труд и капитал.

Известно:

- рыночные цены выпускаемой продукции и ресурсов;
- производственная функция.

Модель (31), (32) представляет классическую задачу математического программирования, а, следовательно, применим метод множителей Лагранжа. Лагранжиан модели (31), (32) имеет вид:

$$L(y_1, y_2, \ldots, y_\ell, \lambda) = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h - \lambda (y_1 - \bar{y}_1)$$

или, что то же самое,

$$L(y_1, y_2, \ldots, y_\ell, \lambda) = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h - \lambda \left[g(y_2, y_3, \ldots, y_\ell) - \bar{y}_1 \right]. \quad (33)$$

В случае существования оптимального решения на множестве допустимых наборов Y применение необходимых условий первого порядка приводит поиск оптимального решения модели к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial y_h} = 0, \quad h = \overline{1, \ell}; \quad (34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \quad (35)$$

Применяя (34) и (35) к лагранжиану, получим (l+1) уравнение:

$$p_1 - \lambda = 0;$$

$$\frac{g_h}{p_h} = -\frac{1}{\lambda}, \quad h = \overline{2, \ell}; \quad (36)$$

$$g - \bar{y}_1 = 0.$$

Полагая, как и при анализе оптимального решения потребления $p_l=1$ окончательно получим систему (36) в виде:

$$\frac{g_h}{p_h} = g_\ell, \quad h = \overline{1, \ell - 1}; \quad (37)$$

$$g - \bar{y}_1 = 0, \quad p_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Величина

$$x_1^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* \\ x_{12}^* \end{bmatrix}; \quad x_2^* = \begin{bmatrix} x_{21}^* \\ x_{22}^* \end{bmatrix}$$ и цену p_1.

Задача 5.

Рассмотрим предыдущую задачу с конкретными численными значениями:

а) начальные запасы продуктов

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix};$$

б) функции полезности наборов:

для первого потребителя:

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}^2 - 4{,}4 x_{11} x_{12} + x_{12}^2;$$

для второго потребителя:

$$u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21}^2 - 14 x_{21} x_{22} + x_{22}^2.$$

Требуется построить экономико-математическую модель равновесия и определить оптимальные потребительские наборы и оптимальную структуру цен.

Решение.

Полагаем $p_2 = l$.

Экономико-математическая модель

$$2x_{11}^* - 4{,}4 x_{12}^* = p_1(-4{,}4 x_{11}^* + 2x_{12}^*);$$

$$2x_{21}^* - 14 x_{22}^* = p_1(-14 x_{21}^* + 2x_{22}^*);$$

$$p_1(x_{11}^* - 10) + x_{12}^* - 30 = 0;$$

$$p_1(x_{21}^* - 50) + x_{22}^* - 50 = 0;$$

$$x_{11}^* + x_{21}^* - 40 = 0.$$

Решая эту систему, получим

$$x_1^* = \begin{bmatrix} 15 \text{ ед.} \\ 25 \text{ ед.} \end{bmatrix}, \quad x_2^* = \begin{bmatrix} 25 \text{ ед.} \\ 75 \text{ ед.} \end{bmatrix}, \quad p_1 = 5 \text{ тыс.р./ед.}$$

3.3. *Примеры рациональной организации производства*

Задача 6.

Предприятие в условиях чистой конкуренции выпускает однородную продукцию.

Известно:

- рыночная цена продукта;
- функция, издержек предприятия.

издержки при изменении объема выпуска на единицу в предположении, что эта единица очень мала. Таким образом, равенство (39) означает, что надо обеспечить такой объем выпуска, при котором предельные издержки производства сравняются с рыночной ценой выпускаемой продукции.

Функции издержек $C(y_1)$ имеют достаточно характерную форму. Типичная кривая общих издержек изображена на рис.1. На этом же рисунке показаны соответствующие этим издержкам кривые предельных издержек $MC(y_1)$, средних издержек $AC(y_1)$.

Системный анализ рациональной организации производства на основе функций издержек подвергается критике с двух позиций.

С одной стороны, соотношение между стоимостью затрачиваемых ресурсов и произведенным количеством зависит от цен P_h различных ресурсов так, что функция издержек изменяется при изменении этих цен.

С другой стороны, при системном анализе проблемы рационального ведения хозяйства в целом цены рассматриваются как эндогенные, а не являются определенными заранее. Поэтому второй подход к моделированию рациональной организации производства на основе производственных функций оказывается более продуктивным, тем более, что этот подход также более эффективен и при наличии ряда производств, что всегда ближе к реальности.

Подчеркнем еще и то, что производственная функция отражает технологические ограничения независимо от систем цен.

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12,5 \end{bmatrix}, \quad x_1^{*} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2,75 \end{bmatrix}.$$

Вторые компоненты наборов $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$ определены по формулам:

$$30 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 + 10\, x_{12}^{(1)} - (x_{12}^{(1)})^2 = 132;$$

$$30 \cdot 7 - 2 \cdot 7^2 + 10\, x_{12}^{(2)} - (x_{12}^{(2)})^2 = 132.$$

Откуда

$x_{12}^{(1)} = 12,5$ ед. и $x_{12}^{(2)} = 2,75$ ед.

Задача 4.

Два потребителя путем купли-продажи приобретают на конкурентных рынках наборы, состоящие из двух видов продуктов.

Известно:

а) начальные запасы продуктов у каждого из потребителей, с которыми они выходят на рынки:

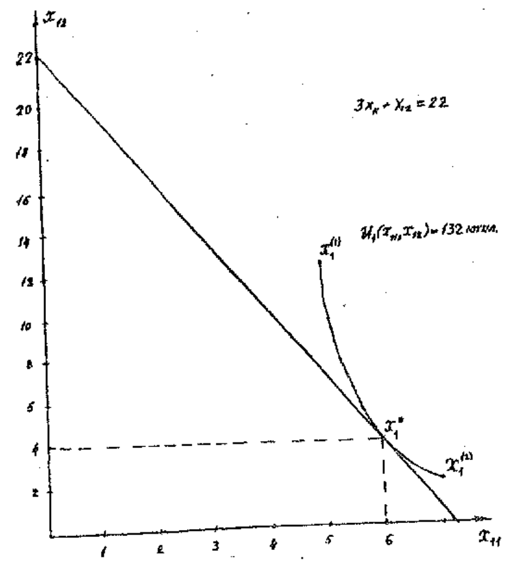

Рис. 2. Определение оптимального потребительского набора

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix},$$

$$f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jl}) \le 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{41}$$

если производственные наборы принадлежат множеству производственных возможностей в общем случае технологически не всегда эффективных.

Экономико-математическая модель рациональной организации производства, включающей m предприятий, имеет вид: требуется найти такие оптимальные производственные наборы y_j^* ($j = \overline{1,m}$), на которых общая прибыль в системе

$$P(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*) = \max_{y_j \in Y_j} \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{l} p_h y_{jh} \tag{42}$$

при условии, что множества допустимых наборов Y_j($j = \overline{1,m}$), описываются системой производственных функций (40). Модель (40), **(41)** – это та же классическая задача математического программирования. Применяя метод множителей Лагранжа и принимая цену l-го блага равной единице, получаем систему уравнений для определения оптимальных наборов y_j^* -

$$\frac{f_{jh}}{p_h} = f_{jl}, \quad j = \overline{1, m}, \quad h = \overline{1, l-1}, \tag{43}$$

где

$$f_{jh} = \frac{\partial f_j}{\partial y_{jh}}, \quad j = \overline{1, m}, \quad h = \overline{1, l} \tag{44}$$

есть предельная величина, характеризующая предельное изменение каждого из производств при изменении того или иного блага на единицу, в предположении, что эта единица очень мала и в пределе стремится к нулю. Рассматриваются при этом только такие виды ресурсов и выпусков, которые связаны с данным производством.

Сведем в единую модель рациональной организации производства различные требования и правила такой организации:

- работа с использованием технически эффективных наборов;
- достижение наибольшей прибыли;

а значения величин предельных полезностей набора по каждому из товаров будут равны:

u_{11} = 6 ютил., u_{12} = 9 ютил.

Задача 3.

Полезность набора благ двух видов для потребителя (i=1) определяется функцией полезности:

$u_1(x_{11}, x_{12}) = 30x_{11} - 2x_{11}^2 + 10x_{12} - x_{12}^2$,

где x_{11} и x_{12} - количество первого и второго блага для потребителя.

Потребитель приобретает товары на рынках чистой конкуренции по известным ценам:

p_1 = 3 тыс.р./ед. и p_2 = 1 тыс.р./ед.

Из своего бюджета он выделяет на приобретение набора 22 тыс. р.

Требуется определить оптимальный набор и его общую полезность для потребителя.

Решение.

Предельная полезность благ первого и второго видов вычисляется по формулам:

$$u_{11} = \frac{\partial u_1(x_{11} x_{12})}{\partial x_{11}} = 30 - 4x_{11};$$

$$u_{12} = \frac{\partial u_1(x_{11} x_{12})}{\partial x_{12}} = 10 - 2x_{12},$$

где u_{11} и u_{12} - предельные полезности благ первого и второго видов для первого потребителя соответственно.

На оптимальном наборе должны выполняться следующие условия;

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_{12}}{p_2}, \quad p_1 x_{11}^* + p_2 x_{12}^* = R_1,$$

где $x_1^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* \\ x_{12}^* \end{bmatrix}$ -оптимальный набор;

R1 - доход потребителя, выделенный на приобретение набора.

Подставляя походные данные, получим систему:

$$\frac{30 - 4x_{11}^*}{3} = 10 - 2x_{12}^*;$$

$$3x_{11}^* + x_{12}^* = 22.$$

Решая эти два уравнения относительно компонентов оптимального набора, определим:

x_{11}^* = 6 ед., x_{12}^* = 4 ед.

общего экономического равновесия. Именно это состояние в идеале и соответствует решению проблемы рационального ведения хозяйства.

При составлении модели, прежде всего, необходимо определить, что понимается под состоянием общего экономического равновесия.

По определению под общим экономическим равновесием понимается такое состояние, в котором каждый потребитель получает наибольшую полезность от приобретения набора благ в соответствии с его возможностью и желанием. Возможности определяются бюджетом (доходом) потребителя, выделенным для приобретения набора благ в данной экономике. Бюджет всегда ограничен и определяется, в свою очередь, начальными запасами благ, являющихся частной собственностью потребителя, причем потребитель готов обменять их на блага приобретаемого набора.

Каждое производство обеспечивает наибольшую прибыль. При этом естественно предположить, что общая прибыль, получаемая в системе известным образом, распределяется среди всех участников экономической деятельности, а их в общем случае столько, сколько потребителей в исследуемой системе. Распределение происходит в соответствии с тем вкладом, который каждый из потребителей вносит в организацию и ведение того или иного производства и реализацию выпускаемой на этом производстве продукции.

Каждый рынок, организованный в системе, характеризуется равенством объемов покупок и продаж.

При составлении модели мы будем пользоваться теми же обозначениями величин и параметров, которые применялись при описании разобранных выше частных моделей потребления и производства.

Итак, исходными данными в уже принятых обозначениях являются:

- число потребителей n;
- число производств m;
- число рынков (благ) l;
- цена l-го блага $p_l=1$;
- начальные запасы благ потребителей $\bar{x} = [\bar{x}_{ih}]$;
- производственные функции при использовании технологически эффективных наборов f_j, $j=1,m$.

Окончание табл. 1

0	0	не определена	0	не определена
1	100	100	50	50
2	190	90	95	45
3	270	80	135	40
4	340	70	170	35
5	400	60	200	30
6	450	50	225	25
7	490	40	245	20
8	520	30	260	15
9	540	20	270	10
10	550	10	275	5

Цена первого блага 2 тыс.р.; второго блага 1 тыс.р. Доход, выделенный потребителем для приобретения набора благ, равен 12 тыс.р.

1. Подсчитаем предельную полезность первого и второго благ.
2. Определите оптимальный потребительский набор и его общую полезность (в ютилях) для потребителя 1.

Решение.

1. В соответствии с определением предельная полезность блага для потребителя 1 определяется формулой

$u_{1h} = u_1(x_{1h}) - u_1(x_{1h}-1)$,

$h = 1, 2, \quad 1 \le x_{ih} \quad 10$, при $x_{ih} = 0$ предельная полезность не определена.

Результаты расчета по этой формуле сведены в табл. 1.

2. Оптимальный потребительский набор определяется решением системы двух уравнений:

$$\frac{u_{11}(x_1^*)}{p_1} = \frac{u_{12}(x_1^*)}{p_2};$$

$$p_1 x_{11}^* + p_2 x_{12}^* = R_1,$$

прибыль в системе. Таким образом, величина индивидуального предложения составит

$$S_i = \sum p_h \bar{x}_{ih} + \alpha_i P, \quad i = \overline{1, n},$$

а, следовательно, система (25) в модели общего равновесия примет вид:

$$\sum_{h=1}^{\ell} p_h (x_{ih} - \bar{x}_{ih}) = \alpha_i P, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (46)$$

Скорректируем теперь систему (27). Напомним, что система (27) отражает рыночное равновесие в экономике без производства. В условиях производства на основе начальных запасов ресурсов и при известных технологиях выпускаются продукты потребления. Для описания производства вводятся производственные наборы.

Обозначим через y_h общее количество h-го блага, связанного со всеми m производствами системы, т.е.

$$y_h = \sum_{j=1}^{m} y_{jh}, \quad h = \overline{1, \ell}.$$

Введем также и уже известные величины:

$$x_h = \sum_{i=1}^{n} x_{ih} \text{ и } \bar{x}_h = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{ih}, \quad h = \overline{1, \ell}.$$

Напомним, что всегда $x_{ih} \ge 0$, $\bar{x}_{ih} \ge 0$, а $y_h > 0$, если h – вид выпуска, и $y_h < 0$, если h – вид производственного ресурса. С учетом этих замечаний состоянию рыночного равновесия будет соответствовать следующая система уравнений:

$$y_h = x_h - \bar{x}_h, \quad h = \overline{1, \ell - 1}. \qquad (47)$$

Заметим, что для l-го блага равенство (47) выполняется автоматически.

Сведем теперь в единую модель общего экономического равновесия отдельные ее составляющие с учетом проделанной коррекции частных моделей:

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{ih}}{p_h} = u_{i\ell}, \quad i = \overline{1, n}; \quad h = \overline{1, \ell - 1}; \\
&\sum_{h=1}^{\ell} p_h (x_{ih} - x_{ih}) = \alpha_i P, \quad i = \overline{1, n}; \\
&f_j(y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{j\ell}) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \\
&\frac{f_{jh}}{p_h} = f_{j\ell}, \quad j = \overline{1, m}; \quad h = \overline{1, \ell - 1}; \\
&P = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_{jh}; \\
&\sum_{j=1}^{m} y_{jh} = \sum_{i=1}^{n} (x_{ih} - \bar{x}_{ih}), \quad h = \overline{1, \ell - 1}.
\end{aligned} \qquad (48)$$

Прямым счетом можно убедиться, что число уравнений (48) равно числу переменных модели.

Подведем основные итоги системного анализа проблемы рационального ведения хозяйства. Имеется математическая модель (48), с помощью которой исследуется, как в сложных экономических организационных системах (сложных сообществах) реализуется разделение труда, производство, обмен и потребление благ без какого-либо единого центра управления или распределения благ, а только на основе организованных в системе конкурентных рынков. Можно также проанализировать, как устанавливаются цены на этих рынках в состоянии конкурентного равновесия. Вместе с тем необходимо отдавать себе отчет и в том, что такая модель не дает исчерпывающего решения проблемы рационального ведения хозяйства. Так, она пренебрегает ситуациями несовершенной конкуренции, описывает экономику без денег, неполной занятости, без учета проблем экономического развития и пр. Модель дает нам несовершенную картину образования цен. Тем не менее, ее достоинство состоит в том, что она дает нам систему и основания, позволяющие в процессе системного анализа понять главные составные части, которые в рыночной экономике характеризуют, с одной стороны, производство и потребление, с другой стороны, формирование цен.

В следующем разделе мы приведем некоторые примеры анализа конкретных ситуаций с помощью описанных выше моделей декомпозиции проблем рационального ведения хозяйства.