ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ

Московский технический университет связи и информатики

Кафедра организации производства, аудита и бух. учета

Методические указания
и задание на контрольную работу
по дисциплине

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

для студентов-заочников 4 курса
(специальность 060800)

Москва 1999

План УМД 1999/2000 уч.г.

Методические указания
и задание на контрольную работу
по дисциплине
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Составители: А.С. Добронравов, доцент
Б.С. Дорохов, доцент

Приведены методические указания и подготовлены задачи для проверки знаний по дисциплине и выработке навыков применения экономико-математических методов и моделей в практике экономических расчетов. По каждому заданию контрольной работы подробно рассматриваются контрольные примеры.

Ил. 16, табл. 6, список лит. 3 назв.

Издание стереотипное. Утверждено на заседании кафедры.

Рецензенты : П.И. Алпетян, доцент
В.А. Воронков, доцент

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с учебным планом студенты заочного обучения Московского института связи, обучающиеся по специальности 07.10, выполняют контрольную работу по дисциплине "Экономико-математические методы и модели".

Кафедра организации, планирования и управления в предприятиях связи (ОПиУПС) считает целесообразным из широкого круга задач, решаемых на основе экономико-математического моделирования, отобрать для контрольной работы оптимизационные задачи организации и планирования связи. При этом выбраны следующие узловые проблемы экономико-математического моделирования: линейное, динамическое программирование, сетевое планирование и управление [1]. Соответственно этому и вся контрольная работа включает в себя три задания.

В целях обеспечения студентов необходимыми для решения задач теоретическими положениями их постановка дополняется сведениями из теории экономико-математических методов и моделирования, а также приводятся решения контрольных примеров по всем поставленным в контрольной работе заданиям.

В ходе выполнения каждого задания студент должен составить для себя цели задачи, сформулировав критерии и ограничения на задачу, составить экономико-математическую модель и получить оптимальное решение. Работа будет выигрывать, если в ней будет дан экономический анализ получаемых результатов. Каждое из трех заданий контрольной работы разбито на десять вариантов.

Номера вариантов (от 0 до 9) по каждому заданию контрольной работы определяются последней цифрой номера студенческого билета.

Контрольная работа выполняется в соответствии с общепринятыми требованиями. Должна быть аккуратно оформлена, написана чернилами, разборчивым почерком. После изложения решения задач по каждому заданию следует оставить по два листа для замечаний преподавателя и ответов на них студента.

Страницы должны быть пронумерованы. Рисунки и таблицы также нумеруются и должны иметь названия. Все исправления делать только чернилами.

В конце работы помещается список использованной литературы.

После завершения контрольной работы студент представляет ее на кафедру ОПиУПС для проверки. Неправильно выполненная работа с отметкой "незачет" возвращается обратно и должна быть после доработки вновь представлена для зачета. Если работа зачтена, но содержит замечания рецензента, их следует учесть и внести в работу соответствующие изменения.

Результаты контрольной работы обсуждаются на экзамене.

I. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

I.I. Краткие методические указания

I.I.I. Линейное программирование и оптимизация

Линейное программирование - это экономико-математический метод планирования, применимый для решения широкого класса экономических задач. Рассмотрим общую постановку таких задач.

Пусть сложная организационная система (сеть, предприятие связи и т.п.) характеризуется совокупностью технико-экономических показателей J_1, J_2, ... J_ℓ. Среди них могут быть показатели как в физическом, натуральном, так и в стоимостном измерениях. При оптимизационной постановке задачи планирования выделяют один из этих показателей, относительно которого выдвигается требование по экстремальности (минимальности или максимальности). На остальные показатели налагаются ограничения типа равенств или неравенств. Для того, чтобы постановка задачи была достаточно полной, необходимо еще учесть все существенные зависимости между показателями. В экономико-математических методах эти зависимости рассматриваются как функциональные. Чтобы такие зависимости ввести в экономико-математическую модель, следует выбрать сначала совокупность независимых переменных x_1, x_2, ..., x_n, значениями которых определяются значения всех показателей J_1, J_2, ..., J_ℓ. Далее из этих показателей надо выбрать главный, тогда остальные будут выступать в роли ограничений на задачу.

Итак, пусть из всей совокупности технико-экономических показателей (целей задачи) выбран один основной - обозначим его J (без индекса) и выдвигается требование его экстремальности при ограничениях на остальные показатели, которые обозначены буквами J_1, J_2, ... J_m. Обозначим через $\overline{J_j}\ (j=\overline{1,m})$ пределы допустимых изменений величин J_j. Тогда задача оптимального планирования в символической записи может быть оформулирована так:

$$J \Rightarrow max \qquad (\text{или } min;)$$
$$J_j \gtrless \overline{J_j}, \quad j=\overline{1,m}; \qquad \text{(I.I)}$$
$$J = f(x_1, x_2, \ldots x_n);$$
$$J_j = g_j(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Разумеется, при каждой конкретной постановке задачи и составлении соответствующей модели в ограничениях на каждый J_j должен быть использован один из знаков: " > ", " < " или " = ".

Во многих случаях, кроме ограничений на показатели J_j, следует учесть еще ряд ограничений, связанных как с физическим, так и с экономическим смыслом независимых переменных $x_k\ (k=\overline{1,n})$. В широком круге задач на эти величины накладывают дополнительные ограничения - условие неотрицательности, т.е. $x_k \geqslant 0$.

Значения независимых переменных, которые удовлетворяют всем ограничениям, называют допустимыми.

Функцию $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ в (I.I) называют целевой, так как с ее помощью формулируется основная цель планирования. Задача (I.I) состоит в том, чтобы найти оптимальные (наилучшие) значения x_1^*, x_2^*, ... x_n^*, т.е. такие значения переменных, которые доставляют экстремум целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ при имеющихся в (I.I) ограничениях.

После того, как величины x_1^*, x_2^*, ... x_n^* найдены, может быть вычислено оптимальное значение основного показателя J:

$$J^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*), \qquad \text{(I.2)}$$

а также и значения остальных показателей

$$J_j^* = g_j(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*). \qquad \text{(I.3)}$$

Совокупность величин

$$x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*, J^*, J_1^*, \ldots J_m^* \qquad \text{(I.4)}$$

и составляет оптимальный план (управление).

Задача (I.I) может быть решена методом линейного программирования в том случае, когда целевая функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и функции $g_j(x_1, x_2, \ldots x_n)$, задающие ограничения, являются линейными функциями. Таким образом, задача линейного программирования - это задача об экстремуме (минимуме или максимуме) линейной функции при ограничениях на переменные в форме линейных равенств или неравенств. Необходимо отметить, что в силу монотонности линейной функции задача об ее экстремуме при отсутствии ограничений вообще не имеет смысла, а экстремум, если он существует, достигается на границе области допустимых значений независимых переменных (области допустимых решений задачи линейного программирования).

I.I.2. Пример постановки задачи линейного программирования

Предприятие после выполнения основной производственной программы располагает запасами сэкономленных материалов трех видов – m_1, m_2, m_3, соответственно в количествах b_1, b_2, b_3 условных единиц. Из этих материалов может быть изготовлено два вида изделий P_1 и P_2. Известны: a_{ij} – количество единиц m_i -го вида материалов, идущего на изготовление единицы P_j -го вида изделия, и d_j – доход, получаемый от реализации одной единицы каждого вида изделия. Все указанные величины представлены в табл. I.I

Таблица I.I

Характеристика производства

Вид материалов	Запас материалов	Расход материалов на изделие	
		P_1	P_2
m_1	b_1	a_{11}	a_{12}
m_2	b_2	a_{21}	a_{22}
m_3	b_3	a_{31}	a_{32}

Задача сводится к тому, чтобы составить такой план выпуска продукции, при котором доход предприятия от реализации всей продукции был бы максимальным.

Для построения модели данной задачи введем переменные: x_1 – количество единиц изделий вида P_1, x_2 – количество единиц изделий вида P_2, которые может выпускать предприятие.

Зная количество материалов каждого вида, расходуемое на изготовление одной единицы продукции, и запасы материалов, можно составить систему ограничений, определяющую область возможных значений x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3. \end{aligned} \qquad (I.5)$$

Система (I.5) устанавливает, что общее количество расходуемых материалов не может превысить имеющихся на предприятии запасов. Исходя из физического смысла, на переменные налагаются дополнительные

ограничения, требующие неотрицательности их значений:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \qquad (I.6)$$

Тогда доход, получаемый предприятием от реализации x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2, составит

$$D(\bar{x}) = d_1x_1 + d_2x_2, \qquad (I.7)$$

где $\bar{x}$ – вектор с координатами (x_1, x_2).

Окончательно задача формулируется следующим образом: из множества допустимых векторов $\bar{x}(x_1, x_2)$ найти такой оптимальный вектор $\bar{x}^*(x_1^*, x_2^*)$, при котором достигается максимум целевой функции

$$D(\bar{x}^*) = \max_{\bar{x}} \{d_1x_1 + d_2x_2\} \qquad (I.8)$$

и выполняется следующая система ограничений:

$$\begin{aligned} &\sum a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,3}; \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (I.9)$$

I.I.3. Формы записи задачи ЛП

Составляя экономико-математическую модель задачи ЛП, следует иметь в виду, что одна и та же задача может быть формально записана в нескольких формах. При этом различают общую, стандартную и основную формы записи задачи линейного программирования.

При общей форме записи математическая постановка задачи ЛП сводится к следующему:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_jx_j + c_0 \Rightarrow extr; \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,\ell}. \end{aligned} \qquad (I.10)$$

Для такой формы записи характерно разнообразие различных вариантов задачи ("max", "min", " = ", " < ", " > ", наличие или отсутствие условий неотрицательности). Это можно рассматривать как недостаток при моделировании задач, в особенности, в плане обеспечения их стандартными программами для решения на ЭВМ. Поэтому целесообразно стандартизировать запись задач ЛП. Это всегда можно сделать. Стандартной задачей ЛП называется задача о максимуме линейной однородной функции при линейных ограничениях единственного вида неравенств " < " и при условиях неотрицательности всех переменных:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \qquad \text{(I.11)}$$
$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Как видно, в отличие от общей записи задачи (I.10) в стандартной (I.11) рассматривается обязательно максимум однородной линейной формы, причем на все переменные налагаются условия неотрицательности, а остальные ограничения имеют вид " $\le$ ".

Существует еще одна форма записи задачи ЛП – записи основной задачи линейного программирования (ОЗЛП). В этом случае ставится задача о максимуме линейной однородной функции при ограничениях вида линейных равенств и при условии неотрицательности всех переменных:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad \text{(I.12)}$$
$$x_j \ge 0, \; j=\overline{1,n}, \; i=\overline{1,m}.$$

Одна и та же задача ЛП может быть представлена в общей, стандартной и канонической формах записи. На основной форме записи основаны вычислительные методы решения задач ЛП.

Перечислим приемы, позволяющие переходить от одной формы записи условий задачи к другой:

1. Переход от задачи на минимум к задаче на максимум осуществляется умножением целевой функции на (-1). Действительно, если функция $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ достигает минимума при значениях x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, то функция $-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ достигает при тех же значениях переменных максимума;

2. Переход от неравенства вида " $\le$ " к неравенствам вида " $\ge$ " (и наоборот) также осуществляется умножением исходного на -1;

3. Переход от неравенства к равенству осуществляется введением дополнительной неотрицательной переменной $x_{n+e} \ge 0$, $e=\overline{1,m}$, т.е. если, к примеру, дано $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, то, вводя x_{n+e}, получим $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+e} = b_i$, где $i=\overline{1,m}$, $e=\overline{1,m}$;

4. При переходе от равенств к неравенствам можно руководствоваться следующим: если дано $A=B$, то это можно формально записать в виде двух неравенств: $A \le B$, $A \ge B$;

5. Введение условий неотрицательности переменных. Пусть на переменную x_k это условие не было наложено. Тогда вместо этой одной переменной можно ввести две неотрицательные переменные x_k' и x_k'' и представить $x_k = x_k' - x_k''$, где $x_k' \ge 0$ и $x_k'' \ge 0$. Это всегда возможно.

Изложенными приемами любая общая задача ЛП (ЗЛП) может быть сведена к стандартной (СЛП) и основной (ОЗЛП) и наоборот. Однако, поскольку в процессе таких преобразований мы вводили дополнительные переменные, то после того, как задача решена, нужно произвести обратный переход к исходным переменным, определяющим непосредственный экономический смысл задачи.

I.1.4. Геометрический метод решения задачи линейного программирования (ЗЛП)

Этот метод может быть использован, когда выполняется следующее условие: $n-m=2$, где n – число переменных, а m – число независимых уравнений в ОЗЛП. В этом случае всегда возможно представление исходной задачи на плоскости, т.е. всегда в задаче можно выделить две свободные переменные, через которые выражаются все остальные. Например, задача в стандартной форме может быть записана как

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \Rightarrow max;$$
$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \quad i=\overline{1,m}. \qquad \text{(I.13)}$$

Значение m может быть любым.

Каждое i-ое ограничение в (I.13) выделяет на плоскости множество точек, координаты которых x_1 и x_2 (рис. I.1) удовлетворяют соответствующему неравенству.

Возьмем, к примеру, первое ограничение:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1.$$

Граничное соотношение

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

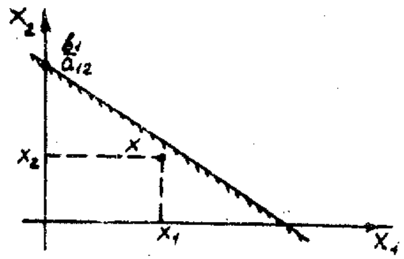


Рис. I.1. Свободные переменные и ограничение ЗЛП на плоскости

определяет прямую линию на плоскости, управление которой, например, можно представить в виде (при $a_{12} \ne 0$) $x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$ (см. рис. I.1). Точки же, координаты которых удовлетворяют неравенству $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1$ лежат по одну сторону от прямой (выше или ниже, в зависимости от знаков коэффициентов a_{i1}, a_{i2}, b_i). Для определенности в нашем примере эта сторона на рис. I.I выделена штриховкой. Аналогично рассматриваются и все последующие ограничения. Геометрической интерпретацией множества допустимых решений является область на плоскости, образованная пересечением всех полуплоскостей, каждая из которых выделяется одним линейным неравенством (на рисунке она обозначена как ОДР).

Если среди ограничений есть условие неотрицательности для обеих свободно переменных x_1 и x_2, то множество допустимых решений лежит в первом квадранте.

Рассмотрим конкретный пример построения области допустимых решений (ОДР).

Пусть дана система ограничений:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 + 2x_2 \leqslant 4\,; & (1) & \\
3x_1 + x_2 \leqslant 6\,; & (2) & \qquad (1.14) \\
2x_1 + 2x_2 \leqslant 5\,; & (3) & \\
x_1 \geqslant 0\,, \quad x_2 \geqslant 0\,. & &
\end{array}
$$

Область допустимых решений показана на рис. I.2. Границами ОДР являются оси координат (прямые $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) и прямые (I), (2), (3), нумерация которых соответствует нумерации неравенств. Сама ОДР (пересечение пяти замкнутых полуплоскостей) представляет собой пятиугольник ОАВСД.

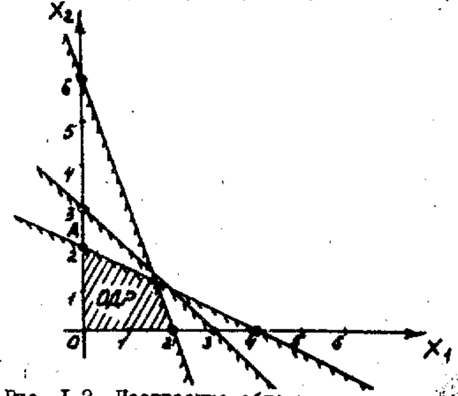


Рис. I.2. Построение области допустимых решений (ОДР)

Обратимся теперь к геометрической интерпретации целевой функции и оптимального решения. Вспомним определение: линией уровня функции $c_1 x_1 + c_2 x_2$ называется множество точек, координаты x_1, x_2 которых удовлетворяют соотношению $c_1 x_1 + c_2 x_2 = C$, где С – фиксированная константа. Множество линий уровня с различными значениями С образуют семейство линий уровня. В нашем случае, при изменении константы С получается семейство параллельных прямых. При этом каждая линия уровня делит плоскость на две замкнутые полуплоскости, в одной из которых значение целевой функции больше чем на линии уровня, а в другой – меньше. Таким образом возможно определить на плоскости свободных переменных x_1 x_2 направления возрастания (убывания) целевой функции.

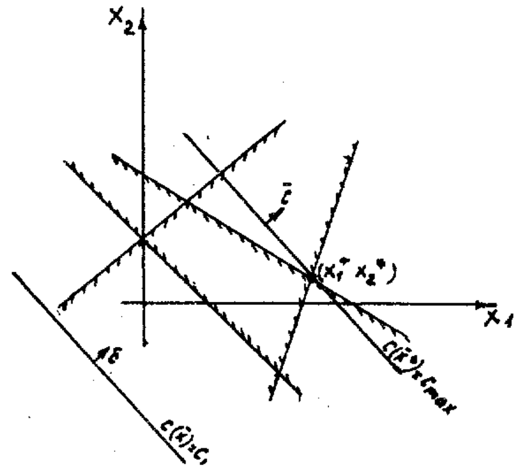
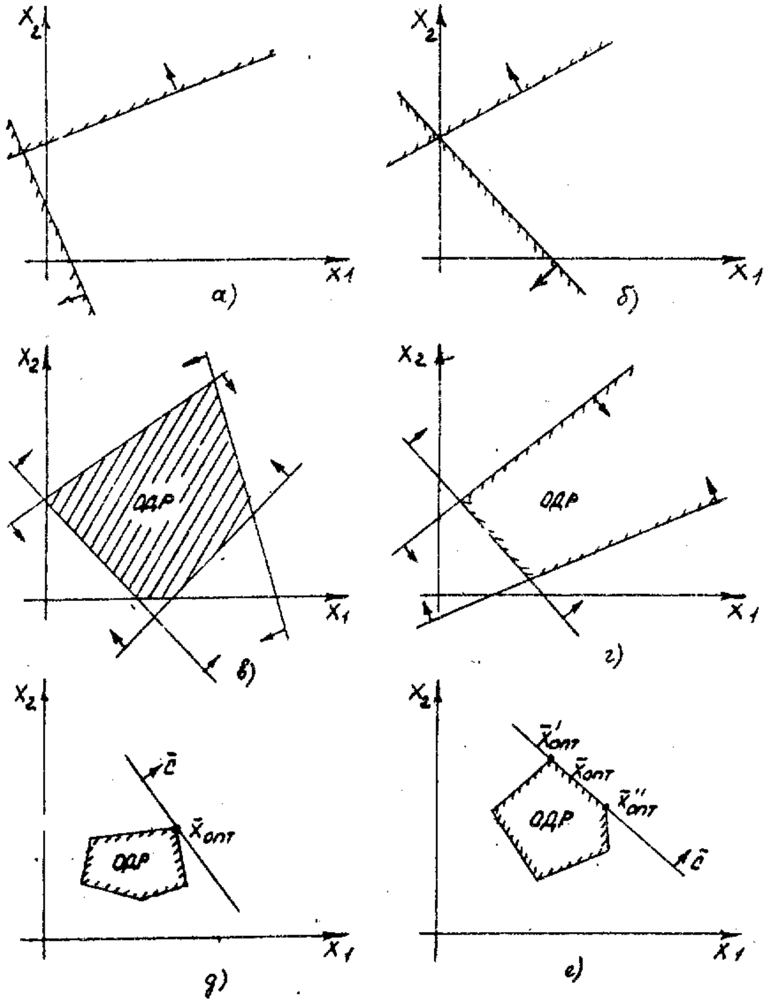


Рис. I.3. ОДР, целевая функция и линии уровня C и C

Пусть область допустимых решений построена и проведена какая-либо линия уровня целевой функции, вместе с вектором С, указывающим направления возрастания последней (рис. I.3). Оптимальному решению соответствует такая точка ОДР (x_1^* , x_2^*), через которую проходит линия уровня целевой функции $c_1 x_1^* + c_2 x_2^* = C_{max}$. Эта точка не может быть внутренней точкой ОДР. Таким образом, оптимальное решение в задачах линейного программирования может достигаться лишь в точках, принадлежащих границе ОДР.

ОДР может быть пустой, если система ограничений несовместна (рис. I.4а), одной точкой (рис. I.4б), многогранником (рис. I.4в), неограниченной многогранной областью (рис. I.4г).

В случае ограниченной ОДР возможно: максимум целевой функции достигается в одной точке (рис. I.4д); максимум целевой функции достигается на ребре ОДР (рис. I.4е).



I.4. ОДР и оптимальные решения ЗЛП

I.2. Контрольный пример

В составе районированной ГТС две АТС имеют свободные емкости. В обслуживаемых ими районах необходимо телефонизировать два новых микрорайона. Известна свободная емкость станций А и В; потребность районов I и 2 в номерах телефонной связи; средняя протяженность абонентских линий от узловых станций А и В до микрорайонов I и 2. Свободная емкость и потребность измеряется в количестве номеров, протяженность линий – в километрах. Исходные данные сведены в табл. I.2.

Таблица I.2

Исходные данные контрольного примера

Район	I	2	Свободная емкость АТС
АТС	протяженность абонентских линий		
А	8	7	3000
Б	6	I5	6000
Потребность микрорайонов	2000	5000	7000

Требуется так удовлетворить потребности микрорайонов в телефонной связи, чтобы затраты на абонентские линии были минимальными.

Р е ш е н и е. При построении экономико-математической модели данной задачи возможными показателями (целями) являются:

удовлетворение потребностей микрорайонов;

использование свободной емкости АТС;

расход кабеля абонентских линий.

В соответствии с постановкой задачи главным показателем является расход кабеля – он должен быть минимальным. Остальные показатели должны выступать как система ограничений.

Для построения целевой функции и системы ограничений введем переменные:

$X_{AI} = X_I$ – количество номеров АТС А, выделяемых I району;
$X_{A2} = X_2$ – количество номеров АТС А, выделяемых 2 району;
$X_{Б-I} = X_3$ – количество номеров АТС-Б, выделяемых I району;
$X_{Б-2} = X_4$ – количество номеров АТС-Б, выделяемых 2 району.

В этих обозначениях целевая функция:

$$L(\bar{x}) = 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 \Rightarrow min ,$$

где $\overline{X}$ (x_1, x_2, x_3, x_4) – одно из допустимых решений задачи, а система ограничений:

$X_1 + X_3 = 2000$ – ограничение на потребности района I;
$X_2 + X_4 = 5000$ – ограничение на потребности района 2;
$X_1 + X_2 \leq 3000$ – ограничение на свободную емкость А;
$X_3 + X_4 \leq 6000$ – ограничение на свободную емкость Б.
$x_i \geq 0$, $i = \overline{1, 4}$ – ограничения по смыслу переменных.

Имеем задачу ЛП в общей форме записи.

Приведем ее к форме ОЗЛП.

Целевая функция:

$$L(\overline{X}) = 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 \Rightarrow min.$$

Система ограничений (в форме равенств):

$$x_1 + x_3 = 2000;$$
$$x_2 + x_4 = 5000;$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 3000;$$
$$x_3 + x_4 + x_6 = 6000;$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6}.$$

Мы ввели две новые переменные $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$, которые имеют смысл остатка (после удовлетворения потребностей) свободных емкостей станций А и Б.

Видно, что система ограничений – это система из четырех уравнений (m = 4) с шестью неизвестными (n = 6). Поскольку $n-m = 2$, то ОЗЛП можно решить графически.

Пусть x_1 и x_2 – свободные переменные. Тогда базисные x_3, x_4, x_5, x_6, а также $L(\overline{X})$ можно выразить через x_1 и x_2 следующим образом:

$$L(\overline{X}) = 2x_1 - 8x_2 + 87000;$$
$$x_3 = -x_1 + 2000;$$
$$x_4 = -x_2 + 5000;$$
$$x_5 = -x_1 - x_2 + 3000;$$
$$x_6 = x_1 + x_2 - 1000.$$

На рис. I.5 в системе координат x_1, x_2 построены прямые линии граничных значений базисных переменных $x_j = 0$, $j = \overline{3,6}$, а также прямая линия множества значений x_1 и x_2, доставляющих значение целевой функции $L(\overline{X})$ = 87000. Стрелкой показано направление убывания целевой функции $L(\overline{X})$. Область допустимых решений (ОДР) показана штриховкой. Точка с координатами $x_1^* = 0$, x_2^* = 3000 доставляет оптимальное решение, при этом $L(\overline{X}^*)$ = 63000 км. Соответствую-

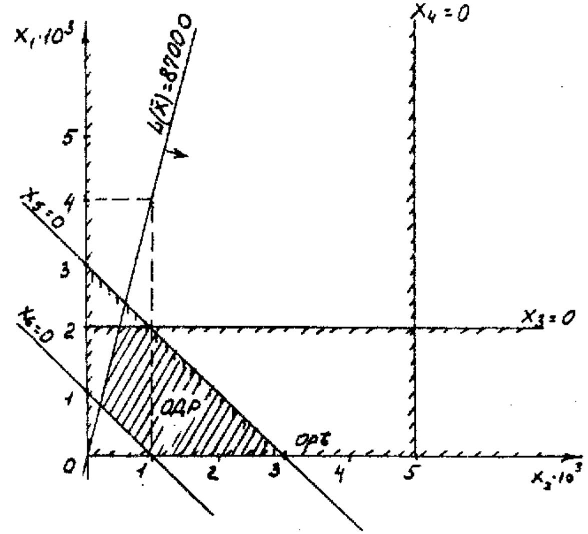


Рис. I.5. Геометрическое решение контрольного примера

щие значения базовых переменных $x_3^* = 2000$, $x_4^* = 2000$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 2000$. Полученное означает, что при оптимальном решении вся свободная емкость станции А отдается во второй микрорайон, а станция Б выделяет в первый и второй микрорайоны поровну по 2000 номеров.

I.3. Варианты задания по линейному программированию

Исходные данные по вариантам сведены в табл. I.3. В ней содержатся конкретные значения параметров задачи оптимального планирования, содержательная постановка которой приводится ниже и она одинакова для всех вариантов данного задания.

Предприятие связи объединенного типа за время планового периода Т условных единиц должно выполнить план производства продукции двух видов P_I и P_2. Плановый объем продукции P_I составляет N_1 , P_2 – N_2 условных единиц.

Для производства продукции каждого вида использовано оборудование группы A_I и A_2. Производительность оборудования этих групп различна и определяется величиной a_{ij} условных единиц, где i – индекс, отмечающий вид оборудования, j – вид продукции. Стоимость

Таблица I.3

Исходные данные по вариантам задания

№ варианта	Плановый период T	Производительность оборудования a_{ij}				Стоимость единицы времени работы оборудования c_{ij}				Плановый объем продукции	
		a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	N_1	N_2
0	I0	3	6	8	4	I	2	I,5	3	50	50
I	I2	4	5	6	6	2	2	4	3	45	50
2	8	3	5	6	4	5	3	2,3	3	40	60
3	9	4	3	4	8	3	2	3	2	55	50
4	I2	2	3	9	7	2	2	2	5	40	55
5	9	7	5	4	8	3	I	3	5	60	60
6	I0	3	5	5	4	4	4	5	4	40	40
7	8	6	3	4	8	5	5	4	3	30	60
8	I0	5	3	7	7	4	2	3	2	35	50
9	I2	4	6	5	4	3	3	2	I	42	39

единицы времени работы оборудования при изготовлении одной единицы продукции составляет c_{ij} условных единиц ($i = \overline{1,2}$; $j = \overline{1,2}$). Требуется сформировать оптимальный план непрерывной работы групп оборудования, при котором будет выполнен план выпуска продукции с минимальной себестоимостью и в заданный срок.

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

2.I. Краткие методические указания

2.I.I. Динамическое программирование и оптимизация

Экономико-математические модели, построенные на основе динамического программирования (ДП), отражают процессы, протекающие в сложных организационно-технических системах $\bar{S}$.

С течением времени $\bar{S}$ изменяется, переходя последовательно из начального состояния S_0 в $\bar{S}_1$, из $\bar{S}_1$ в $\bar{S}_2$, из $\bar{S}_{m-1}$ в S_m конечное.

Многошаговость перехода из состояния в состояние является характерным свойством задач динамического программирования.

В общем случае при переходе из состояния $\bar{S}_i$ в $\bar{S}_{i+1}$ $(i=\overline{0,m-1})$ может возникнуть следующая задача: какое из возможных K состояний $S_{i+1}^{(1)}$, $S_{i+1}^{(2)}$, ... $S_{i+1}^{(k)}$ имеет смысл выбрать. Обозначим через u_{i+1} то решение, которое приведет нас к определенному выбору $S_{i+1}^{(k)}$. Процесс $\bar{U}$, где на каждом шаге имеется возможность выбора следующего состояния, называется управлением, а компонента этого процесса u_{i+1} называется управлением на (i +I)-ом шаге. При такой постановке задачи состояние системы $\bar{S}_i$ на (i +I)-ом шаге зависит от того, в каком состоянии находилась система шагом раньше и какое управление было при этом выбрано, т.е. $S_{i+1}^{(k)} = f(\bar{S}_i, u_{i+1})$.

При моделировании процессов с динамикой системы $\bar{S}$, при переходе ее из S_0 в S_m связывают величину $F(\bar{S})$, значения которой дают возможность сравнивать процессы и выбирать из них лучшие.

В экономико-математических моделях динамического программирования величина $F(\bar{S})$, определяемая как выигрыш или функция полезности, обладает свойством аддитивности: выигрыш системы в динамике ее из S_0 в S_m равен сумме выигрышей для всех шагов процесса, протекающего в системе. В наших обозначениях это формально можно записать

$$F(\bar{S}) = \sum_{i=1}^{m} F_i\,(\bar{S}_{i-1}, u_i). \qquad (2.I)$$

Оптимальность управления состоит в том, что из множества возможных управлений $\bar{U}(u_1, u_2, \ldots u_m)$ следует найти такое управление $\bar{U}^*(u_1^*, u_2^*, \ldots u_m^*)$, под влиянием которого система $\bar{S}$ перейдет из состояния S_0 в S_m так, чтобы $F(\bar{S})$ стала максимальной (минимальной).

2.I.2. Принцип оптимальности в динамическом программировании

Принцип оптимальности, сформулированный математиком Беллманом, устанавливает, что процесс (S_0 , $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_{m-1}$, S_m) перехода системы $\bar{S}$ из состояния $\bar{S}_i$ в $\bar{S}_{i+1}$ оптимален тогда и только тогда, когда оптимален каждый из усеченных процессов ($\bar{S}_i$, $\bar{S}_{i+1}$, $\bar{S}_{i+2}$, ... S_m), где $i=\overline{1,m-1}$. Это означает, что

$$F_i\,(\bar{S}_i, u_{i+1}) + F_{i+1}\,(\bar{S}_{i+1}, u_{i+2}) + \ldots + F_m\,(\bar{S}_{m-1}, u_m)\,, \qquad (2.2)$$

для $\forall i$ $(i=\overline{0,m-1})$ будет оптимальна, если только все состояния $\bar{S}_i$ взяты из оптимального пути. Этот принцип определяет общий алгоритм решения задач ДП.

2.1.3. Алгоритм решения задач динамического программирования

Опишем алгоритм, для определенности положив, что требуется найти максимум $F(\bar{S})$ за m шагов процесса:

Шаг 1. Определяем максимум $F_m(S_{m-1}^{(k)}, U_m)$, на последнем m-ом шаге. Соответствующее максимуму F_m оптимальное управление на последнем шаге обозначим через U_m^*. Итак,

$$\max_K F_m(S_{m-1}^{(k)}, U_m) = F_m(S_{m-1}^{(k)}\ U_m^*). \qquad (2.3)$$

Индекс K означает, что состояние системы $\bar{S}_{m-1}$ имеет несколько вариантов и нужно искать максимум $F_m(S_{m-1}^{(k)}, U_m)$ для всех вариантов. В связи с тем, что оптимальное состояние системы $S_{m-1}^{(k)}$ неизвестно (с учетом всего процесса от начала S_0 до конца S_m), управление U_m^* на m-ом шаге называют условным оптимальным управлением.

Шаг 2. Определяем максимум суммы:

$$F_{m-1}(S_{m-2}^{(k)}, U_{m-1}) + F_m(S_{m-1}^{(k)}, U_m^*), \qquad (2.4)$$

где $S_{m-2}^{(k)}$ - возможные состояния системы $\bar{S}$ за два шага до конца;

U_{m-1} - управление, переводящее систему $\bar{S}$ из состояния $S_{m-2}^{(k)}$ в состояние $S_{m-1}^{(k)}$.

Для каждого К будет свое условное оптимальное управление, которое обозначим U_{m-1}^*. Для краткости обозначим $F_m(S_{m-1}^{(k)}, U_m^*) = F_m^{*(k)}$, тогда в краткой форме записи имеем:

$$F_{m-1,m}^{*(k)} = \max_K \left\{ F_{m-1}(S_{m-2}^{(k)}, U_{m-1}) + F_m^{*(k)} \right\} = F_{m-1}^{*(k)} + F_m^{*(k)}. \qquad (2.5)$$

Шаг 3. Определяем максимум суммы:

$$F_{m-2}(S_{m-3}^{(k)}, U_{m-2}) + F_{m-1,m}^{*(k)}, \qquad (2.6)$$

где $S_{m-3}^{(k)}$ - возможные состояния системы за три шага до конца;

U_{m-2} - управление, переводящее систему $\bar{S}$ из состояния $S_{m-3}^{(k)}$ в состояние $S_{m-2}^{(k)}$. Аналогично, для каждого К будет свое условное оптимальное управление U_{m-2}. Итак,

$$F_{m-2,m-1,m}^{*(k)} = F_{m-2}^{*(k)} + F_{m-1,m}^{*(k)}. \qquad (2.7)$$

Шаг 4. Последнее вычисление состоит в нахождении максимума суммы

$$F_1(S_0, U_1) + F_{2,3,\ldots m}^{*(k)} = F_{1,2,\ldots m}^*. \qquad (2.8)$$

Если S_0 определено, то величина $F_1(S_0, U_1)$ будет зависеть только от выбора управления U_1, если же S_0 нужно выбрать из определенного множества $S_0^{(k)}$, то нужно перебрать по К все варианты и соответствующие управления, чтобы $F_{1,2,\ldots m}^*$ была максимальной. Таким образом будет определен оптимальный выигрыш, а также оптимальное управление $\bar{U}^*(U_1^*, U_2^*, \ldots U_m^*)$ и оптимальная траектория системы $\bar{S}^*(S_0^*, S_1^*, S_2^*, \ldots S_m)$.

2.2. Контрольный пример

2.2.1. Постановка задачи

В задании на контрольную работу сформулированы два типа задач динамического программирования:

1. Определение затрат на строительство линии передачи (определение оптимальной траектории).
2. Распределение капвложений между предприятиями.

В первом случае требуется оценить минимальные и максимальные объемы затрат при определенных ограничениях; во втором - так распределить капвложения, чтобы доходы предприятий были наибольшими также при определенных ограничениях.

Сформулируем контрольные примеры, рассмотрим составление алгоритма (схемы) решения задач, получим численные результаты.

2.2.2. Определение затрат на организацию связи

Требуется организовать связь между пунктами S и S_K. Схема возможных вариантов организации связи показана на рис. 2.1. Числа стоящие над каждым отрезком пути связи, есть расходы (в условных единицах), связанные с прокладкой участка линии передачи.

В соответствии со схемой вариантов, прокладывать участки линии передачи можно только вверх, направо или по диагонали. Найти путь связи между узлами S и S_K, которому соответствуют наименьшие затраты.

Алгоритм решения:

Из схемы вариантов строительства видно, что возможны такие состояния системы $\bar{S}$, для которых в общем случае возможны три управления: направо, вверх и по диагонали - и нужно будет выбирать на-

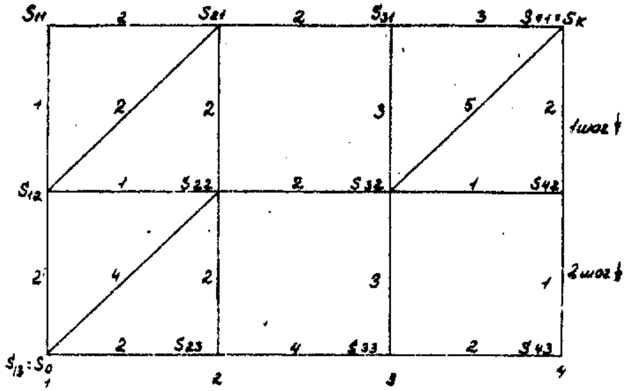


Рис. 2.I. Варианты организации связи, затраты, нумерация шагов

лучшее из них. Возникает вопрос – как определить шаг динамического программирования. В том случае, если бы отсутствовала возможность организации диагональных участков, то за шаг можно было бы принять переход от каждого узла к следующему при заданном направлении движения (вправо и вверх). В данной же схеме перебирать узловые пункты таким образом нельзя. Например, из S_{32} в S_K можно перейти либо за два таких шага, либо за один. Поэтому в данном случае возможно ввести шаг динамического программирования и его нумерацию по вертикалям, а именно, нумеровать шаги в данном случае будем, начиная с последней – четвертой и сверху вниз. Критерий оптимальности (выигрыш) F_i от любого узла связи до конца S_K будем обозначать F_{iK}, где i – номер вертикали ($i = \overline{1,4}$), K – номер узла на этой вертикали.

Вертикаль 4

Из точки S_{42} только одно возможное управление – вверх. Отметим стрелкой на рис. 2.2 путь из S_{42} в $S_{41}=S_K$. В кружке состояния S_{42} проставляем затраты ($F_{42} = 2$). Из точки S_{43} тоже только одно управление – вверх. Отметим стрелкой направление из S_{43} в S_{42}, а в кружке состояния S_{43} поставим значение $F_{43} = 2+I = 3$.

Вертикаль 3

Из узла S_{31} только одно управление – направо. Отметим на рис. 2.2 стрелкой направление возможного пути связи из S_{31} в $S_{41}=S_K$. В кружке поставим 3 ($F_{31} = 3$). Из точки S_{32} три управления. В зависимости от того, какое мы выберем, получим разные значения $F_{3...}$.

Итак: F_{32} (управление вверх) = 3+3 = 6;
F_{32} (управление по диагонали) = 5;
F_{32} (управление направо) = I+2 = 3.

Наименьшее (условное оптимальное управление) обозначим F_{32}^* = 3. В кружке S_{32} поставим 3. Отметим направление условного оптимального управления стрелкой из S_{32} в S_{42}.

Из узла S_{33} два управления:
F_{33} (вверх) = 3+3 = 6;
F_{33} (вправо) = 3+2 = 5.

Наименьшее F_{33}^* = 5. Отметим стрелкой путь из S_{33} в S_{43}, а в кружке S_{33} поставим 5.

Вертикаль 2

Из узла S_{21} одно управление – направо. Отметим стрелкой путь связи из S_{21} в S_{31}. В кружке S_{21} проставим 5. F_{21}^* = 2+3 = 5.

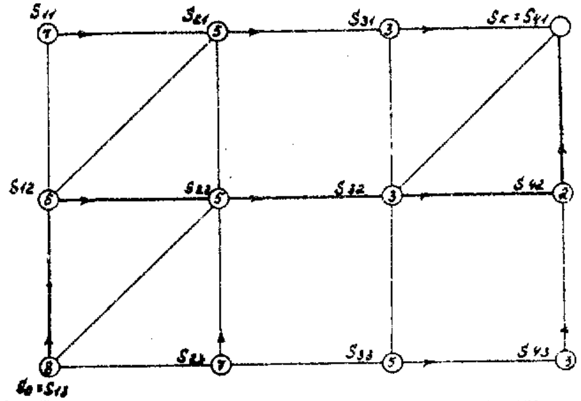


Рис. 2.2. Направление пути, затраты условно-оптимальных управлений и оптимальный путь связи

Из узла S_{22} два управления:
F_{22} (вверх) = 2+5 = 7;
F_{22} (вправо) = 2+3 = 5.

Наименьшее F_{22}^* = 5.

Отметим стрелкой путь из S_{22} в S_{32}. В кружке S_{22} поставим 5.

Из узла S_{23} два управления:
F_{23} (вверх) = 5+2 = 7;
F_{23} (вправо) = 5+4 = 9.

Наименьшее F_{23}^* = 7.

Отметим стрелкой путь из S_{21} в S_{22}. В кружке S_{21} поставим 7.

Вертикаль I

Из узла S_1 одно управление – направо. Отметим стрелкой путь связи из S_{11} в S_{21}. В кружке S_{11} поставим 7.

Из узла S_{12} три управления:

F_{12} (вверх) = I+7 = 8;

F_{12} (по диагонали) = 2+5 = 7;

F_{12} (направо) = I+5 = 6.

Наименьшее F_{12}^{*} = 6. Отметим стрелкой путь из S_{12} в S_{22}. В кружке S_{12} поставим 6.

Из узла $S_{13} = S_0$ (начального узла) три управления:

F_{13} (вверх) = 2+6 = 8;

F_{13} (по диагонали) = 4+5 = 9;

F_{13} (вправо) = 2+7 = 9.

Наименьшее F_{13}^{*} = 8. Отметим стрелкой путь из узла S_0 в S_{12}. В кружке S_{11} поставим 8.

Теперь выберем все участки оптимального пути связи от S_0 до S_4. Это будет: от S_0 вверх до S_{12}, от S_{12} направо до S_{22}, от S_{22} до S_{32}, от S_{32} до S_{42} и от S_{42} к S_k.

Перебор узлов связи можно производить и по горизонталям, по любым другим параллельным прямым, по любой системе, лишь бы в конечном итоге для каждого узла получить оптимальное значение выигрыша $F_{i,i+1,\dots m}$, подчиненного условию аддитивности.

К задачам подобного типа могут быть сведены также следующие. Пусть на предприятии известен годовой объем продукции и ее качество. За определенный плановый период требуется увеличить объем продукции в определенное число и улучшить качество также в определенное число раз. Условия производства таковы, что улучшение качества и увеличение объемов осуществляется на определенных этапах, т.е. дискретно. Известны затраты на улучшение качества и увеличение объемов. К конечному результату можно прийти неоднозначно. Требуется выбрать наилучший путь достижения конечного результата при минимуме затрат на совершенствование производства.

Пример содержательной постановки задачи:

На заводе ежемесячно выпускают 1000 радиоприемников третьего класса. В течение пяти лет требуется увеличить выпуск продукции до 1300 радиоприемников и увеличить качество до первого класса. Условия производства таковы, что улучшение качества и увеличение количества можно обеспечить поочередно в течение каждого года, как показано на рис. 2.3. Числа, стоящие под каждым отрезком, есть рас-

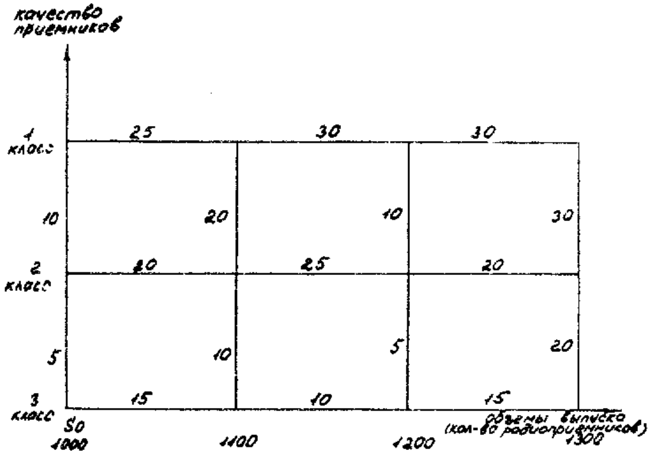


Рис. 2.3. Затраты на совершенствование производства радиоприемников

ходы, связанные либо с увеличением объемов (по горизонтали), либо с улучшением качества (по вертикали). S_0 и $S_{T=5}$ – начальное и конечное состояния производства завода на плановом периоде T = 5 годам. Процесс из состояния S_0 в S_5 происходит за 5 шагов. Требуется выбрать такую ломаную, соединяющую S_0 с S_5, чтобы затраты были минимальными.

2.2.3. Распределение ресурсов между предприятиями

В задании на контрольную работу сформулированы простейшие задачи о распределении ресурсов между двумя или тремя предприятиями. Общая их постановка сводится к следующему.

Пусть имеется некоторое количество каких-либо средств Z_1. Эти средства нужно распределить между предприятиями, например, между двумя I и П. Пусть x_1 отдано первому и y_1 – второму, так что $x_1+y_1=Z_1$. Эти средства в течение года приносят доход: для первого предприятия – $f(x_1)$, для второго – $g(y_1)$. Таким образом, общий доход за год $f(x_1)+g(y_1)=F_1$. В конце года эти средства уменьшаются (например, износ оборудования). Предположим, что это уменьшение средств известно: остаток на первом предприятии – $\varphi(x_1)$, на втором $\psi(y_1)$. К началу второго года эти остатки суммируются $\varphi(x_1)+\psi(y_1)=Z_2$ и снова распределяются между предприятиями, так что $Z_2=x_2+y_2$. В результате за второй год работы получим доход $f(x_2)+g(y_2)$ и остаток на третий год $Z_3 = \varphi(x_2) + \psi(y_2)$ и т.д. Требуется в течение m лет распределять ресурсы так, чтобы общий доход за эти m лет $\sum_{i=1}^{m}[f(x_i)+g(y_i)]$ был максимальным. Необходимо отметить, что задача актуальна, когда предприятие работает на один конечный результат.

Алгоритм решения:

Ш а г I. Предположим, что на m-ый (последний год) общее количество средств, оставшееся от m-I года, равно Z_m. Выделим первому предприятию – x_m, тогда второму останется $(Z_m - x_m)$. Доход за последний год $F_m = f(x_m) + g(Z_m - x_m)$. Нужно найти максимум этой функции при условии, что $0 \leqslant x_m \leqslant Z_m$. Обозначим этот максимум через $F_m^*(Z_m)$.

Ш а г 2. Предположим, что на $(m$-I)-ый год общее количество средств, оставшееся от $(m$-2)-го года, равно Z_{m-1}. Выделим первому предприятию x_{m-1}, второму – $Z_{m-1}-x_{m-1}$. Доход за $(m$-I)-ый год составит $f(x_{m-1})+g(Z_{m-1}-x_{m-1})$, а доход за последние два года

$$F_{m-1,m} = f(x_{m-1}) + g(Z_{m-1}-x_{m-1}) + F_m^*(Z_m).$$

Но Z_m – есть остаток средств от $(m$-I)-го года. По условию задачи имеем:

$$Z_m = \varphi(x_{m-1}) + \psi(Z_{m-1}-x_{m-1}).$$

Учитывая это, получим:

$$F_{m-1,m} = f(x_{m-1}) + g(Z_{m-1}-x_{m-1}) + F_m^*[\varphi(x_{m-1}) + \psi(Z_{m-1}-x_{m-1})].$$

Нужно найти максимум этой функции при условии, что $0 \leqslant x_{m-1} \leqslant Z_{m-1}$. Обозначим его $F_{m-1,m}^*$. Затем также будем искать доход за три шага до конца планового периода, так, чтобы его величина зависела от переменного x_{m-2} и постоянного, но пока нам не известного Z_{m-2}, причем $0 \leqslant x_{m-2} \leqslant Z_{m-2}$. Найдя максимум $F_{m-2,m-1,m}$, переходим к следующему шагу и т.д.

В начале первого года планирования (m-ый шаг) нужно будет искать наибольшее значение функции вида

$$F_{1,2,\ldots,m} = f(x_1) + g(Z_1 - x_1) + F_{2,3,\ldots,m}^*$$

при условии $0 \leqslant x_1 \leqslant Z_1$.

Но так как Z_1 известно, то последний шаг и дает конечный результат решения задачи.

Разберем конкретный пример.

Для двух предприятий, взаимно дополняющих друг друга в выпуске продукции определенного вида, выделено восемь условных единиц ресурсов на три года. Если первому предприятию дать X единиц ресурса, то доход составит $f(x) = 10x - x^2$. Если второму предприятию дать y единиц, то доход составит $g(y) = 4y$. Уменьшение ресурсов происходит по следующим законам: $\varphi(x) = 0{,}6x$; $\psi(y) = 0{,}8y$.

Как распределить данные ресурсы в течение трех лет, чтобы общий доход был максимальным?

Решение.

Доход за третий год равен $F_3 = 10x_3 - x_3^2 + 4(Z_3 - x_3)$, где Z_3 – остаток средств от второго года; x_3 – средства, выделяемые первому предприятию; $Z_3 - x_3$ – средства, выделяемые второму предприятию. Найдем максимум функции F_3 при условии $0 \leqslant x_3 \leqslant Z_3$. F_3 парабола (рис. 2.4). Преобразуем уравнение параболы:

$$F_3 = 6x_3 + 4Z_3 - x_3^2 = -(x_3-3)^2 + 9 + 4Z_3.$$

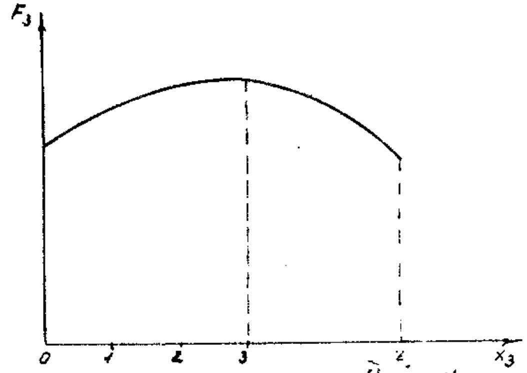


Рис. 2.4. Зависимость F_3 от x_3

Вершина параболы будет в точке $x_3 = 3$, а максимальное значение $F_{(3)}^* = 4Z_3 + 9$. Если бы из условия задачи следовало, что $x_3 < 3$, т.е. вершина параболы лежала вне рассматриваемого интервала, то наибольшие значения F_3 нужно было определять на концах отрезка изменения переменной x_3. Кроме того, если бы функция дохода была не квадратичной, а более сложной, то максимум следует определить дифференцированием и решением соответствующего уравнения.

Теперь составим функцию, выражающую доход от обоих предприятий за второй и третий годы вместе. Это будет

$$F_{2,3} = 10x_2 - x_2^2 + 4(z_2 - x_2) + 9 + 4z_3 .$$

Но, учитывая, что

$$z_3 = 0{,}6x_2 + 0{,}8(z_2 - x_2),$$

имеем:

$$F_{2,3} = 10x_2 - x_2^2 + 4(z_2 - x_2) + 9 + 4[0{,}6x_2 + 0{,}8(z_2 - x_2)]$$

или

$$F_{2,3} = -(x_2 - 2{,}6)^2 + 9 + 7{,}2z_2 .$$

Максимум F_{23} будет при $x_2 = 2{,}6$; $F_{23}^*(2{,}6) = 15{,}76 + 7{,}2z_2$.

Составим функцию, выражающую доход от обеих отраслей за первый, второй и третий годы вместе. Это будет

$$F_{1,2,3} = 10x_1 - x_1^2 + 4(z_1 - x_1) + 15{,}76 + 7{,}2z_2 ,$$

но $z_2 = 0{,}6x_1 + 0{,}8(z_1 - x_1)$,

$$F_{1,2,3} = 10x_1 - x_1^2 + 4(z_1 - x_1) + 15{,}76 + 7{,}2[0{,}6x_1 + 0{,}8(z_1 - x_1)].$$

Преобразуем параболу к виду

$$F_{1,2,3} = -(x_1 - 2{,}28)^2 + (2{,}28)^2 + 9{,}76z_1 + 15{,}76.$$

Итак, максимум будет при $x_1^* = 2{,}28$.

Отсюда план распределения ресурсов на три года:

Первый год: Доход:

$x_1^* = 2{,}28$; $f(x_1^*) = 10 \cdot 2{,}28 - (2{,}28)^2 = 17{,}6$;

$y_1^* = 8 - 2{,}28 = 5{,}72$; $g(y_1^*) = 4 \cdot 5{,}72 = 22{,}88$;

$F_1 = 40{,}48$.

Остатки на второй год: $\varphi(x_1^*) + \psi(y_1^*) = 0{,}6 \cdot 2{,}28 + 0{,}8 \cdot 5{,}72 = 5{,}94$.

Второй год Доход:

$x_2^* = 2{,}6$; $f(x_2^*) = 10 \cdot 2{,}6 - (2{,}6)^2 = 19{,}24$;

$y_2^* = 5{,}94 - 2{,}6 = 3{,}34$; $g(y_2^*) = 4 \cdot 3{,}34 = 13{,}38$;

$F_2 = 32{,}62$.

Остатки на третий год: $\varphi(x_2^*) + \psi(y_2^*) = 0{,}6 \cdot 2{,}6 + 0{,}8 \cdot 3{,}34 = 4{,}24$.

Третий год: Доход:

$x_3^* = 3$; $f(x_3^*) = 10 \cdot 3 - 3^2 = 21$;

$y_3^* = 4{,}24 - 3 = 1{,}24$; $g(y_3^*) = 4 \cdot 1{,}24 = 4{,}96$;

$F_3 = 25{,}94$.

Общий доход

$$F_{1,2,3}^* = \sum_{i=1}^{3} F_i = 40{,}48 + 32{,}62 + 25{,}94 = 99{,}04.$$

2.3. Варианты задания по динамическому программированию

Второе задание включает решение двух задач:

1. Определение наименьших затрат на организацию связи между пунктами;

2. Распределение ограниченного ресурса между видами производства различной продукции.

Содержательные постановки каждой из задач одинаковы для всех вариантов задания. Варианты отличаются исходными данными.

По первой задаче исходные данные по вариантам даны на рис. 2.5 ÷ 2.14. Соответственно вариант 0 на рис. 2.5 и вариант 9 на рис. 2.14.

По второй задаче исходные данные по вариантам сведены в табл. 2.1.

Содержательная постановка задачи 1

Задана схема возможных путей связи из узла S_0 в узел S_k (в зависимости от варианта эти схемы представлены на рис. 2.5 ÷ 2.14).

Каждая ветвь связи обеспечивает требуемую пропускную способность при организации связи между узлами S_0 и S_k.

Затраты на организацию связи по каждой ветви различны и указаны в условных единицах на схеме (над каждой ветвью связи).

На организацию связи наложено условие, что на схеме возможных путей можно передвигаться только вверх, направо или по диагонали (если имеется соответствующая ветвь). Требуется так организовать связи, чтобы затраты были минимальными.

Содержательная постановка задачи 2

Предприятие обладает ограниченным ресурсом в объеме R условных единиц, вложение которого в производство приносит доход. Этот ресурс требуется распределить в течение m лет между двумя видами производства $П_I$ и $П_2$, организованными на предприятии.

Количество ресурса X, вложенное в начале i -го года в производство $П_I$, в конце этого года приносит доход $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$.

К концу года ресурс расходуется так, что остается остаток, равный $\varphi_i(x)$.

Количество ресурса y, вложенное в начале i -го года в производство $П_2$, в конце этого года приносит доход $g_i(y)$ и соответственно расходуется так, что остается остаток $\psi_i(y)$.

В конце каждого планируемого года остатки суммируются и снова перераспределяются между $П_I$ и $П_2$.

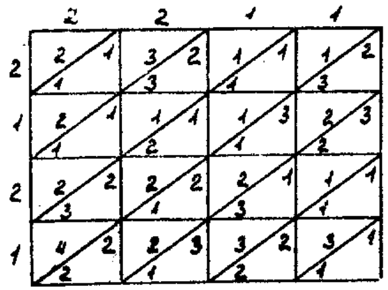


Рис. 2.5

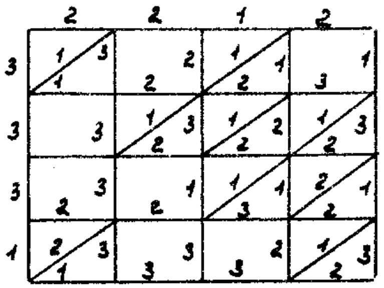


Рис. 2.6

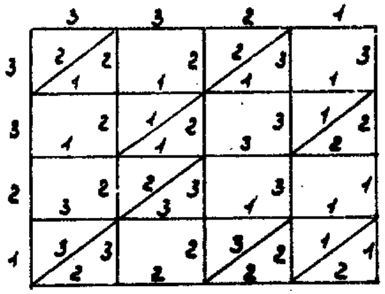


Рис. 2.7

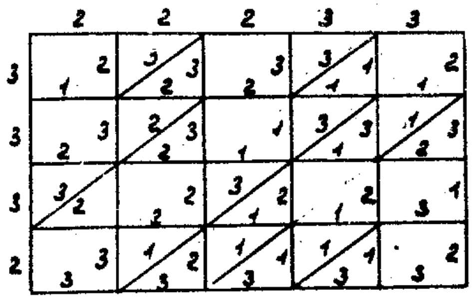


Рис. 2.8

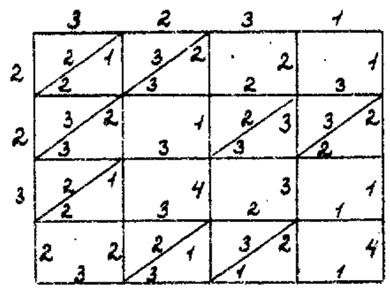


Рис. 2.9

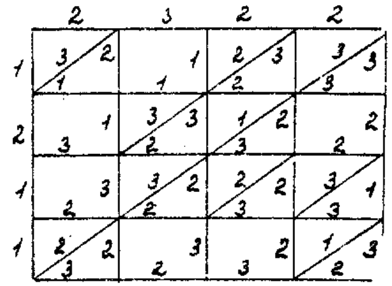


Рис. 2.10

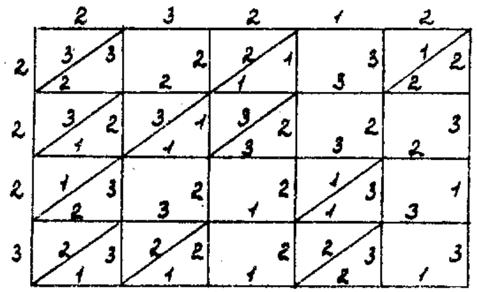


Рис. 2.11

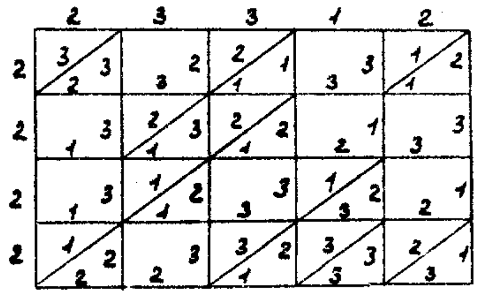


Рис. 2.12

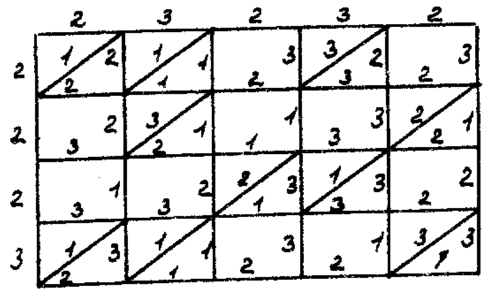


Рис. 2.13

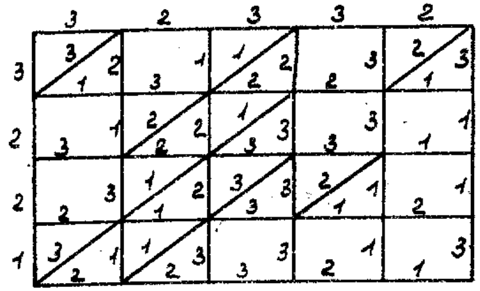


Рис. 2.14

Требуется так распределить ресурс R, чтобы суммарный доход от обоих видов производства за планируемый период был наибольшим.

Таблица 2.1

Исходные данные к задаче 2 – распределение ограниченного ресурса между видами производства различной продукции

№ варианта	Объем ресурса R, условных единиц	Плановый период m, лет	Характеристика производства $П_1$		Характеристика производства $П_2$	
			доход $f(x)$	остаток $\varphi(x)$	доход $g(y)$	остаток $\psi(y)$
0	40	4	$f_i(x)=6x$ $i=\overline{1,4}$	$\varphi_i(x)=0{,}5x$ $i=\overline{1,4}$	$g_i(y)=7y$ $i=\overline{1,4}$	$\psi_i(y)=0{,}4y$ $i=\overline{1,4}$
I	15	3	$f_1(x)=f_2(x)=$ $4x-x^2$ $f_3(x)=2x$	$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=$ $\varphi_3(x)=0{,}8x$	$g_1(y)=g_2(y)=$ $2y-y^2$ $g_3(y)=2y$	$\psi_1(y)=\psi_2(y)=$ $0{,}7y$ $\psi_3(y)=0{,}5y$
2	I00	4	$f_1(x)=f_2(x)=$ $2x-x^2$ $f_3(x)=f_4(x)=2x$	$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=$ $0{,}9x$ $\varphi_3(x)=\varphi_4(x)=0{,}8x$	$g_1(y)=g_2(y)=$ $2y$ $g_3(y)=g_4(y)=y$	$\psi_1(y)=\psi_2(y)=$ $0{,}7y$ $\psi_3(y)=\psi_4(y)=0{,}5y$
3	60	3	$f_1(x)=f_2(x)=$ $6x-x^2$ $f_3(x)=8x$	$\varphi_1(x)=0{,}9x$ $\varphi_2(x)=0{,}8x$ $\varphi_3(x)=0{,}7x$	$g_1(y)=4y$ $g_2(y)=3y$ $g_3(y)=2y$	$\psi_1(y)=\psi_2(y)=$ $0{,}8y$ $\psi_3(y)=0{,}6y$
4	50	3	$f_i(x)=4x$ $i=\overline{1,3}$	$\varphi_i(x)=0{,}5x$ $i=\overline{1,3}$	$g_i(y)=8y$ $i=\overline{1,3}$	$\psi_i(y)=0{,}1y$ $i=\overline{1,3}$
5	5	4	$f_1(x)=7x$ $f_2(x)=8x$ $f_3(x)=x^2$ $f_4(x)=2x^2$	$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=$ $0{,}6x$ $\varphi_3(x)=\varphi_4(x)=$ $0{,}7x$	$g_1(y)=6y$ $g_2(y)=7y$ $g_3(y)=10y$ $g_4(y)=y^2$	$\psi_1(y)=\psi_2(y)=$ $0{,}8y$ $\psi_3(y)=\psi_4(y)=$ $0{,}9y$

Окончание табл. 2.I

№ варианта	Объем ресурса k, условных единиц	Плановый период m, лет	Характеристика производства $П_I$		Характеристика производства $П_2$	
			доход $f(x)$	остаток $\varphi(x)$	доход $g(y)$	остаток $\psi(y)$
6	I0	3	$f_1(x)=7x$ $f_2(x)=7x$ $f_3(x)=10x$	$\varphi_1(x)=0{,}2x$ $\varphi_2(x)=0{,}6x$ $\varphi_3(x)=0{,}4x$	$g_1(y)=6y$ $g_2(y)=g_3(y)=4y$	$\psi_1(y)=\psi_2(y)=0{,}8y$ $\psi_3(y)=0{,}7y$
7	I5	2	$f_1(x)=f_2(x)=5x$	$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=0{,}4x$	$g_1(y)=6y$ $g_2(y)=4y$	$\psi_1(y)=0{,}6y$ $\psi_2(y)=0{,}8y$
8	20	3	$f_1(x)=f_2(x)=20x-x^2$ $f_3(x)=6x$	$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=0{,}8x$ $\varphi_3(x)=0{,}8x$	$g_1(y)=8y$ $g_2(y)=5y$ $g_3(y)=9y$	$\psi_1(y)=0{,}8y$ $\psi_2(y)=0{,}7y$ $\psi_3(y)=0{,}4y$
9	I0	3	$f_1(x)=f_2(x)=10x-x^2$ $f_3(x)=2x$	$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=0{,}6x$ $\varphi_3(x)=0{,}8x$	$g_1(y)=6y$ $g_1(y)=g_3(y)=7y$	$\psi_i(y)=0{,}8y$ $i=\overline{1,3}$

3. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

3.I. Краткие методические указания

3.I.I. Основные определения. Правила составления сетевого графика

Методы сетевого планирования и управления (СПУ) и построенные на их основе экономико-математические модели все в большей степени применяются в планировании и управлении сложных организационных систем связи. Так например, экономико-математические модели сетей и предприятий связи на основе СПУ позволяют решать и исследовать такие важные задачи, как оптимальное по времени распределение ограниченных ресурсов, оптимальное по стоимости распределение ресурсов при заданном времени, формировании оптимальных структур

определение максимальных потоков в сетях связи.

В основе экономико-математических моделей с применением СПУ лежит сетевая модель (сетевой график, логическая сеть), отображающая технологическую взаимосвязь между работами. Начальная информация должна содержать перечень всех работ, последовательность их выполнения, продолжительность каждой работы, затраты на ее выполнение. В частности, информация о ходе выполнения некоторого проекта может быть задана табл. 3.I.

Таблица 3.I

Исходные данные о проекте

Работа	Каким работам предшествует	Продолжительность	Работа	Каким работам предшествует	Продолжительность
I	2,3	2	6	8	6
2	8	3	7	-	4
3	6,7	4	8	-	2
4	6,7	5	9	-	7
5	9	4			

Информацию, представленную в табл. 3.I, можно изобразить в виде сетевого графика. Ориентированные дуги графа – сетевого графика – интерпретируют работы. Вершины графа, соединенные дугами, называют событиями. Событие служит началом одних и концом других дуг-работ. Событие выражает готовый результат – все работы, входящие в событие, окончены. Оно выражает логическую связь между работами, заключающуюся в том, что работы, входящие в данное событие, непосредственно предшествуют работам, выходящим из него; ни одна выходящая из данного события работа не может начинаться до окончания всех работ, входящих в это событие.

Если работа не имеет предшествующей, то она выходит из начального события (начало проекта). Работы, которые не предшествуют никаким другим, входят в конечное событие.

Если несколько работ выходят из одного и того же события P_i и входят в одно и то же событие P_j (рис. 3.Iа), то для того, чтобы их различать, т.е. чтобы каждую пару событий соединяла не более чем одна работа, вводим дополнительные события $P_{i1}, P_{i2}, \ldots P_{i\,k-1}$, которые соединяем с P_j, так называемыми фиктивными работами, нулевой продолжительности, изображаемыми пунктиром (рис. 3.Iб).

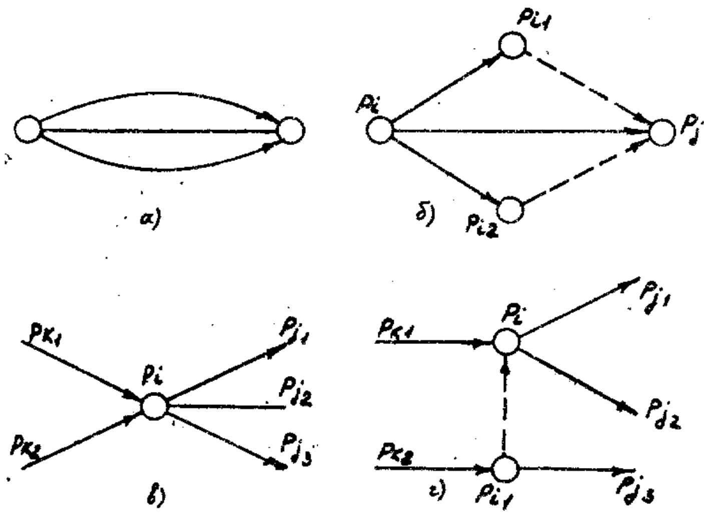


Рис. 3.I. К правилам составления сетевого графика

Если в событие P_j входит более чем одна работа, например, (P_{K_1}, P_i) и (P_{K_2} P_i), и из него выходит более чем одна работа, например (P_i P_{j_1}), (P_i P_{j_2}), (P_i P_{j_3}) (рис. 3.Iв), но для выполнения некоторых выходящих работ, например (P_i P_{j_3}), не обязательно выполнение всех входящих работ, например (P_{K_1} P_i), то введением дополнительных событий и фиктивных работ строим сетевой график так как указано на рис. 3.Iг.

В соответствии с изложенными правилами, сетевой график проекта, исходные данные которого сведены в табл. 3.I, изображен на рис. 3.2 (номера работ проставлены над дугами-работами в кружках).

События сетевого графика нумеруются. Существуют различные способы нумерации, однако все эти события однозначно определяют взаимосвязь работ. Один из возможных способов сводится к следующему. Начинаем просмотр сети с начального события P_0, которому присваиваем номер 0. Вычеркиваем все работы, выходящие из P_0. При этом может случиться, что группа событий окажется без входящих работ. Будем называть эту группу события событиями первого ранга. Вычеркиваем затем все дуги, выходящие из событий первого ранга, и вновь образовавшейся группе событий присваиваем ранг 2 и т.д. Событиям пер-

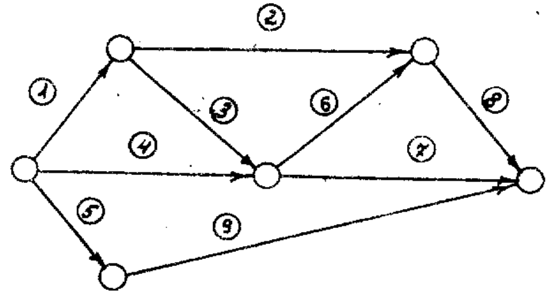


Рис. 3.2. Сетевой график проекта

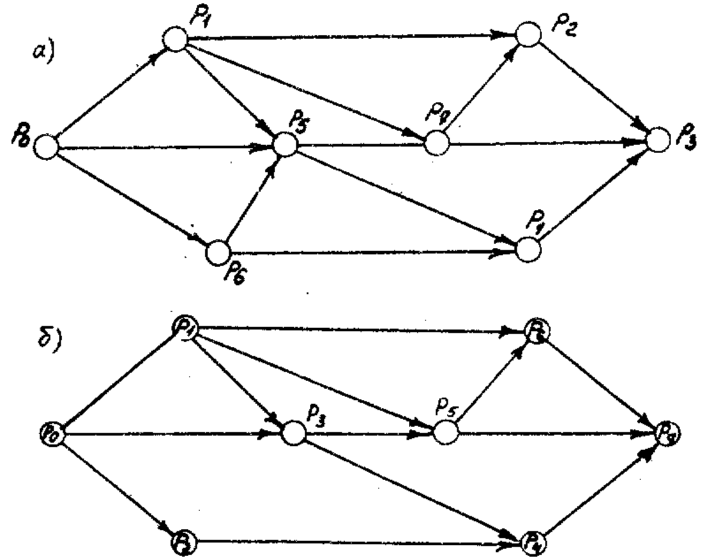


Рис. 3.3. Нумерация сетевого графика

вого ранга присвоим в произвольном порядке номера I, 2... K_1, событиям второго ранга присвоим номера K_1+1, ... K_1+K_2 и т.д. Так как события одного ранга между собой не соединены, а события меньшего ранга имеют меньший индекс, то в пронумерованной таким образом сети для любой дуги-работы ($P_i\,P_j$) всегда $i<j$. Покажем нумерацию событий на примере. На рис. 3.3а показан сетевой график, отображающий исходные данные одного из проектов. Требуется в соответствии с приведенными выше правилами пронумеровать события. Итак, событие P_0 нулевого ранга. Вычеркнем выходящие из него дуги ($P_0\,P_1$), ($P_0\,P_5$), ($P_0\,P_6$). События P_1 и P_6 останутся без входящих дуг. Это событие первого ранга. Вычеркнув дуги ($P_1\,P_2$), ($P_1\,P_4$), ($P_1\,P_5$), ($P_6\,P_4$) и ($P_6\,P_5$), получим одно событие P_5 без входящих дуг; оно – событие второго ранга. Аналогично P_4 и P_7 – события третьего ранга, а P_2 – событие четвертого ранга, наконец, P_3 – событие пятого ранга. События внутри данного ранга равноценны в том смысле, что им можно присваивать номера в любом порядке. Например, событию P_1 – номер 1, а P_6 – номер 2. Следующее событие P_5 – второго ранга. Его порядковый номер 3. События P_4 и P_7 получат соответственно номера 4 и 5; событие P_2 номер 6 и наконец событие P_3 получит номер 7. Пронумерованная сеть изображена на рис. 3.3б.

3.1.2. Параметры сетевого графика

1. Критический путь.

Пусть имеем пронумерованную сетевую модель и для каждой работы ($P_i\,P_j$) задана продолжительность $t_{ij} \geqslant 0$ ее выполнения, которую будем считать длиной этой работы. Длиной пути ($P_i\,P_{j_1}$), ... ($P_{j_1}\,P_{j_2}$), ... ($P_{j_k}\,P_j$) из P_i в P_j будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь, т.е. число $t_{ij_1} + t_{j_1 j_2} + \dots + t_{j_k j}$.

Любой путь из начального P_0 в конечное P_n событие, имеющий максимальную длину $T_{кр} = T_n$, называется критическим путем.

2. Наиболее раннее время наступления события.

Время наступления начального события P_0 считается равным 0. Временем T_j наступления любого события P_j считается время окончания всех работ, входящих в P_j. Наиболее раннее (минимальное) время возможного наступления события P_j равно максимальной длине пути из P_0 в P_j. Оно же является наиболее ранним временем начала всех работ, выходящих из P_j. Обозначается это время через $T_j^{(рн)}$.

3. Наиболее позднее время наступления события.

Наиболее позднее (максимальное) время $T_j^{(пн)}$ наступления события P_j равно разности между длиной критического пути $T_{кр}$ и максимальной длиной пути из P_j в конечное событие P_n.

4. Резервы времени.

Полный резерв времени работы R_{ij} – это максимальное количество времени, которым мы располагаем для увеличения продолжительности выполнения работы ($P_i\,P_j$) без увеличения времени выполнения проекта в целом (без увеличения времени $T_{кр}$).

$$R_{ij} = T_j^{(пн)} - T_i^{(рн)} - t_{ij}. \qquad (3.1)$$

Полный резерв означает также максимальное количество времени, на которое можно сдвинуть начало работы ($P_i\,P_j$) по сравнению с наиболее ранним временем ее начала $T_i^{(рн)}$, не увеличивая при этом время $T_{кр}$ выполнения проекта.

Полный резерв работ, лежащих на критическом пути (критических работ), равен нулю.

Увеличение продолжительности некритических работ за счет использования всего ее полного резерва обязательно влечет появление нового критического пути, в состав которого войдет эта работа.

Свободный резерв времени r_{ij} работы ($P_i\,P_j$) – это максимально допустимое увеличение продолжительности этой работы, не нарушающее возможность начинать все работы ($P_j\,P_k$), выходящие из P_j в наиболее раннее время наступления P_j -го события – $T_j^{(рн)}$:

$$r_{ij} = T_j^{(рн)} - T_i^{(рн)} - t_{ij}. \qquad (3.2)$$

Увеличение продолжительности работы ($P_i\,P_j$) на часть ее свободного резерва может уменьшить полный резерв работ ($P_k\,P_i$), входящих в событие P_i, и не влияет на резервы работ, выходящих из события P_j.

Работы, лежащие на критическом пути, не имеют свободных резервов.

3.1.3. Расчет параметров сетевого графика

Существуют различные способы расчета параметров $T_j^{(рн)}$, $T_j^{(пн)}$ это матричный метод, вычисления на графе, вычисления по таблице. Если количество событий невелико, то удобно расчет проводить прямо на графе. Для этого каждый кружок, обозначающий событие, делят на четыре сектора. Верхний сектор отводится для записи номера события, левый – для вычисляемых $T_j^{(рн)}$, нижний – для номеров $i_1 \dots i_k$ тех событий, на которых достигается значение числа, записанного в левом секторе, и наконец, правый – для вычисляемых $T_j^{(пн)}$. Рассмотрим расчет на конкретном примере. Составим сетевой график по данным табл. 3.I (рис. 3.4а) и вычислим $T_j^{(\text{рн})}$, $T_j^{(\text{пн})}$, а также найдем критический путь и определим его длину $T_{кр}$.

Проставляем в верхних секторах номера событий. В кружке-событии P_0 записываем в левом секторе нуль. Затем рассматриваем кружок P_1, в который входит только одна работа ($P_0 P_1$). Складываем число 0, записанное в левом секторе P_0, с числом $t_{01} = 2$ и результат $T_1^{(\text{рн})} = 2$ записываем в левый сектор кружка P_1. В нижний сектор записываем число 0 – номер события P_0, на котором достигнуто значение $T_1^{(\text{рн})}$. Аналогично находим $T_2^{(\text{рн})} = 4$. При вычислении $T_3^{(\text{рн})}$ учитываем, что в событие P_3 входят две работы ($P_0 P_3$) и ($P_1 P_3$). Поэтому составляем две суммы $T_0 + t_{03} = 0+5 = 5$ и $T_1^{(\text{рн})} + t_{13} = 2+4 = 6$. Наибольшей из них оказывается вторая, которую в качестве $T_3^{(\text{рн})}$ записываем в левый сектор кружка P_3, а в нижний записываем I, номер события P_1, на котором достигнуто значение $T_3^{(\text{рн})}$, и т.д.

Результат первого просмотра сети приведем на рис. 3.4б, откуда видно, что $T_{кр} = T_5^{(\text{рн})} = 14$.

Вычисляем теперь $T_j^{(\text{пн})}$ при $T_5^{(\text{пн})} = T_5^{(\text{рн})} = 14$. Проставляем в правом секторе кружка P_5 число I4. Рассматриваем событие P_4; из него выходит лишь одна работа ($P_4 P_5$). Вычисляем $T_4^{(\text{пн})} = 14-2 = 12$, которое записываем в правый сектор кружка P_4 – затем определяем $T_3^{(\text{пн})}$. Из P_3 выходят две работы ($P_3 P_4$) и ($P_3 P_5$). Составляем разности $T_4^{(\text{пн})} - t_{34} = 12-6 = 6$ и $T_5^{(\text{пн})} = 14-4 = 10$ и наименьшую из них (6) записываем в качестве $T_3^{(\text{пн})}$ в правый сектор кружка P_3 и т.д. Окончательный результат приведен на рис.3.4в.

Начиная с события P_5 по номерам, записанным в нижних секторах, выделяем критический путь (на рис. 3.4в он выделен двойной линией).

3.I.4. Линейная диаграмма проекта

Недостатком сетевого графика является отсутствие наглядности в распределении ресурсов проекта во времени. Определить, какие работы выполняются в каждый данный момент времени, можно по линейной диаграмме проекта.

На горизонтальной оси такой диаграммы наносится равномерная шкала времени t. Каждая работа изображается отрезком, параллельным оси времени. Длина отрезка равна продолжительности работы. События P_i и P_j – начало и конец работы ($P_i P_j$) – соответственно опреде-

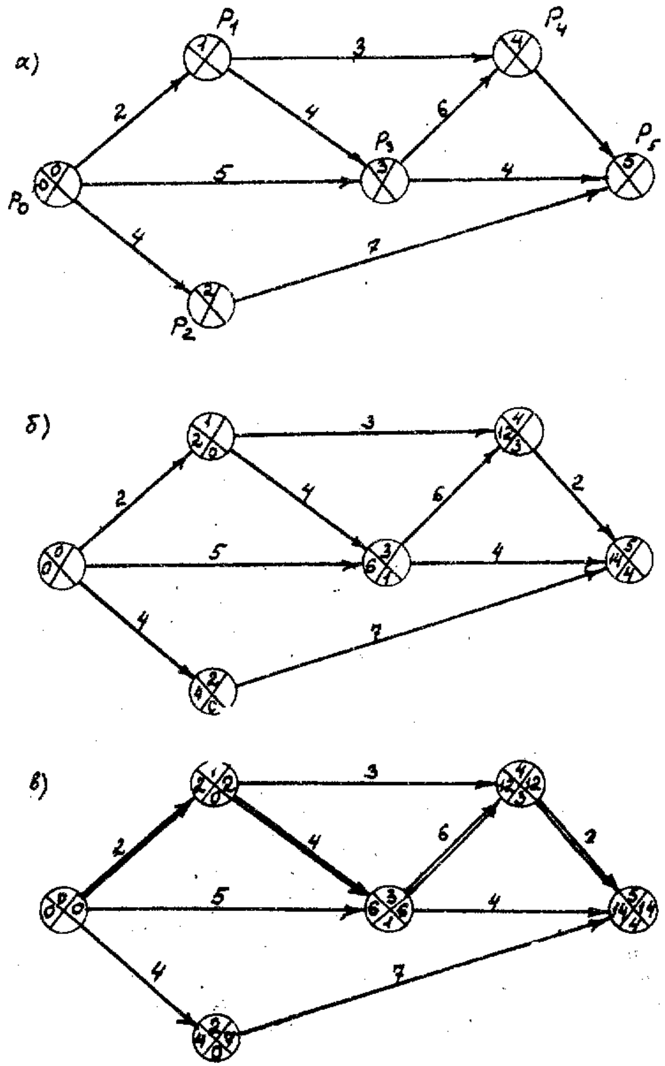


Рис. 3.4. Расчет параметров сетевого графика

ляют начало. Конец отрезка $[P_i P_j]$. Отрезки располагаются один над другим, снизу вверх, в порядке возрастания индекса j (окончания работы ($P_i P_j$)), а для работ, входящих в одно и то же j в порядке возрастания индекса i (начала работы). Момент наступления события P_0 считают началом проекта и полагают его равным нулю, т.е. отрезки $[P_0 P_j]$ откладывают от оси ординат $t = 0$. Отрезок $[P_i P_j]$ откладывают так, чтобы его начало P_i лежало на одной вертикали с самым правым концом всех работ, заканчивающихся в P_i. Таким образом начало отрезка $[P_i P_j]$ соответствует минимальному времени $T_i^{(PH)}$ наступления события P_i. На рис. 3.5а приведена линейная диаграмма проекта, сетевой график выполнения которого представлен на рис. 3.4. По линейной диаграмме можно определить критический путь, наиболее поздние и наиболее ранние времена наступления событий, резервы времени всех работ.

3.1.5. Сетевое планирование и оптимальное распределение ресурсов

Предполагаются известной последовательность работ, их продолжительность и ресурсы, затрачиваемые на выполнение работ. Задача заключается в оптимальном распределении ресурсов по работам, т.е. в таком размещении работ, которое при заданных ограниченных ресурсах обеспечивало бы выполнение проекта в минимальное время.

Для решения такой задачи составляется сетевой график и линейная диаграмма проекта, в которой начало каждой работы ($P_i P_j$) совпадает с $T_i^{(PH)}$ наступления события P_i. Определяется критический путь $T_{кр}$, критические работы, а также полные резервы времени некритических работ. Проектируем начало и конец каждой работы ($P_i P_j$) на горизонтальную ось. Обозначаем самую левую проекцию через $\tau_0 = 0$, а следующую за ней через τ_1.

Рассматриваем работы, расположенные в линейной диаграмме над промежутком $[0\tau_1]$. Все работы ($P_0 P_j$) нумеруем в порядке возрастания их полных резервов, а работам с одинаковыми полными резервами присваиваем номера в порядке убывания их интенсивностей. Таким образом, критические работы, расположенные над отрезком $[0\tau_1]$ (их полные резервы равны нулю), получат номера I, 2, ... K_1. Затем получит номер K_1 +I некритическая работа, полный резерв которой меньше полного резерва любой другой некритической работы, расположенной над $[0\tau_1]$, и т.д.

Суммируем последовательно в порядке возрастания номеров используемый на этих работах ресурс. До тех пор, пока получаемая

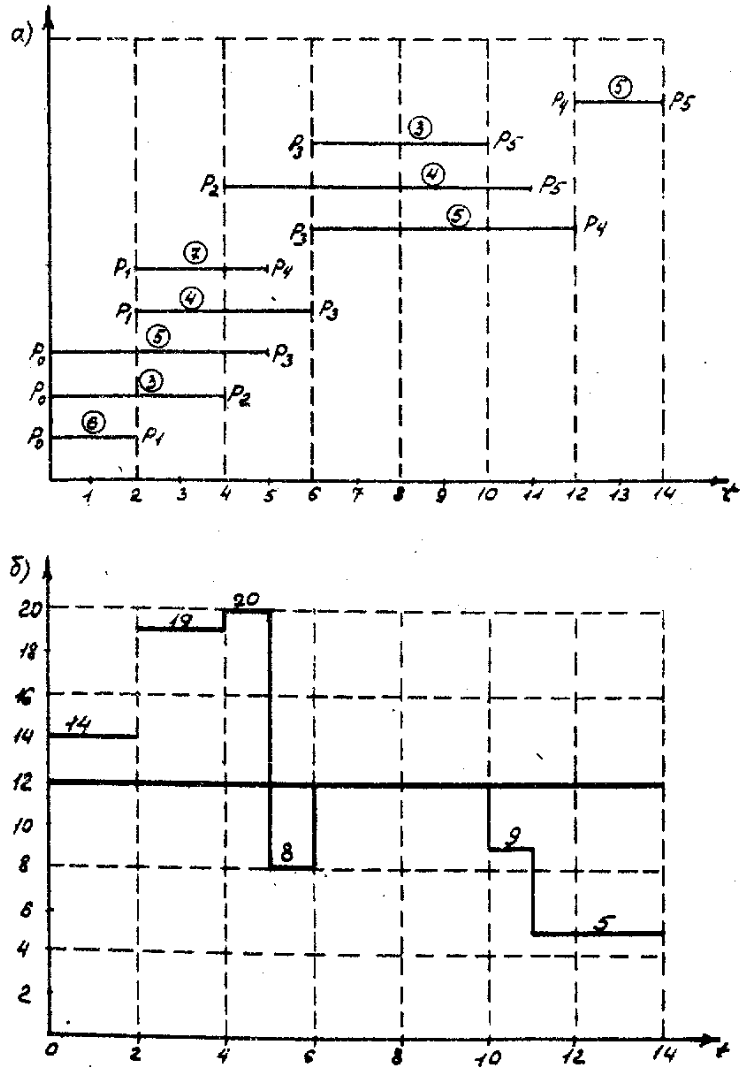


Рис. 3.5. Линейная диаграмма и распределение затрат в ходе выполнения проекта

сумма не превзойдет заданного в $[0\tau_1]$ наличия ресурса, работы оставляем в первоначальном положении. Как только для какой-нибудь работы окажется, что после прибавления потребляемого на ней ресурса полученная сумма станет больше наличной в $[0\tau_1]$ ресурса, то начало этой работы отодвигаем вправо к моменту τ_1 и продолжаем просмотр последующих работ линейной диаграммы проекта.

Пусть уже проделано К шагов процесса просмотра. При этом суммарный ресурс, потребляемый на работах, размещенных над промежутком $[0\ \tau_k]$, не превышает заданного R. Переходим к $(K+1)$-ому шагу.

Момент τ_k считаем моментом начала оставшейся части проекта, состоящей из работ, расположенных над промежутком $[\tau_k\ T_{kp}]$. Устанавливаем каждую работу $(P_i\ P_j)$ так, чтобы ее начало P_i совпадало с новым $T_i^{(PH)}$ события P_i. (Работы, начатые левее τ_k, не сдвигаем.)

Повторяем с рассматриваемой частью проекта все последующие операции, что и на отрезке $[0\tau_k]$. Причем новые полные резервы определяем для всех работ, расположенных правее τ_k.

Рассматриваем все работы, расположенные над промежутком $[\tau_k\ \tau_{k+1}]$. Это те $(P_i\ P_j)$ начала P_i, которые расположены левее или над τ_k, а концы P_j расположены правее или над τ_{k+1}. Всем рассматриваемым работам присваиваем номера. В первую очередь, присваиваем номера I, 2... K_2 работам, левый конец которых расположен левее τ_k. Для каждой из этих работ вычисляем разность между ее новым полным резервом и отрезком этой работы от ее начала до τ_{k+1}, и все работы нумеруем в порядке возрастания этих разностей. Работы с одинаковыми разностями нумеруем в порядке убывания их интенсивностей. Остальным работам, расположенным над промежутком $[\tau_k\ \tau_{k+1}]$, присваиваем номера в той же последовательности, как было описано выше, т.е. критические работы получат номера K_2+1, ... K_2+K_3 в порядке убывания интенсивностей и т.д.

Процесс заканчивается, когда просмотрены таким образом все работы проекта.

3.2. Контрольный пример

Рассмотрим на примере сетевого графика рис. 3.4 оптимальное по времени распределение ограниченных ресурсов. На рис. 3.6 изображен этот сетевой график, с кружками на дугах, в которых представлены затраты в условных единицах на выполнение соответствующих работ проекта. На рис. 3.5а предоставлена линейная диаграмма этого

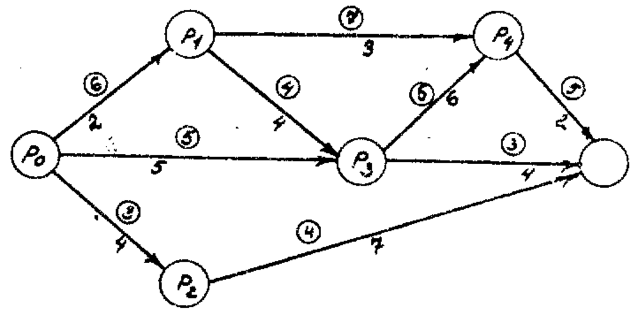


Рис. 3.6. Сетевой график и затраты на выполнение работ

проекта, а на рис. 3.5б показано распределение требуемых затрат в ходе выполнения проекта. Для определенности положим, что затраты на выполнение проекта ограничены и не должны превышать I2 условных единиц ($R = 12$).

Из графика ежедневного распределения затрат видно, что максимально требуется одновременно 20 условных единиц затрат в промежутке от $t = 4$ до $t = 5$ дней.

Критический путь образуют работы $(P_0\ P_1), (P_1\ P_3), (P_3\ P_4), (P_4\ P_5)$ и $T_{kp} = 14$ (рис. 3.4в, 3.5б).

Спроектируем на отрезок $[0,14]$ начало и концы всех работ проекта.

Начинаем просмотр линейной диаграммы и графика ежедневной потребности затрат на отрезке $[0,2]$. Пронумеруем все работы, располагаемые над этим отрезком: $(P_0\ P_1)$, $(P_0\ P_2)$ и $(P_0\ P_3)$.

Работа $(P_0\ P_1)$ – критическая, ей присваивается номер I, а работы $(P_0\ P_2)$ и $(P_0\ P_3)$ имеют полные резервы $R_{02} = 3$ и $R_{03} = 1$, поэтому $(P_0\ P_3)$ получит номер 2, а $(P_0\ P_2)$ номер 3.

Рассчитаем затраты, необходимые для выполнения этих работ. Для работы $(P_0\ P_1)$ требуется 6 единиц, для работы $(P_0\ P_3)$ – 5 единиц. В сумме II единиц, что не превосходит возможных $R = 12$ единиц. Если к II прибавить необходимые затраты (3 единицы) на работу $(P_0\ P_2)$, то полученные I4 единиц будут больше R. Поэтому начало работы сдвигаем к моменту времени $\tau = 2$ (наличие резерва $R_{02} = 3$ это позволяет сделать).

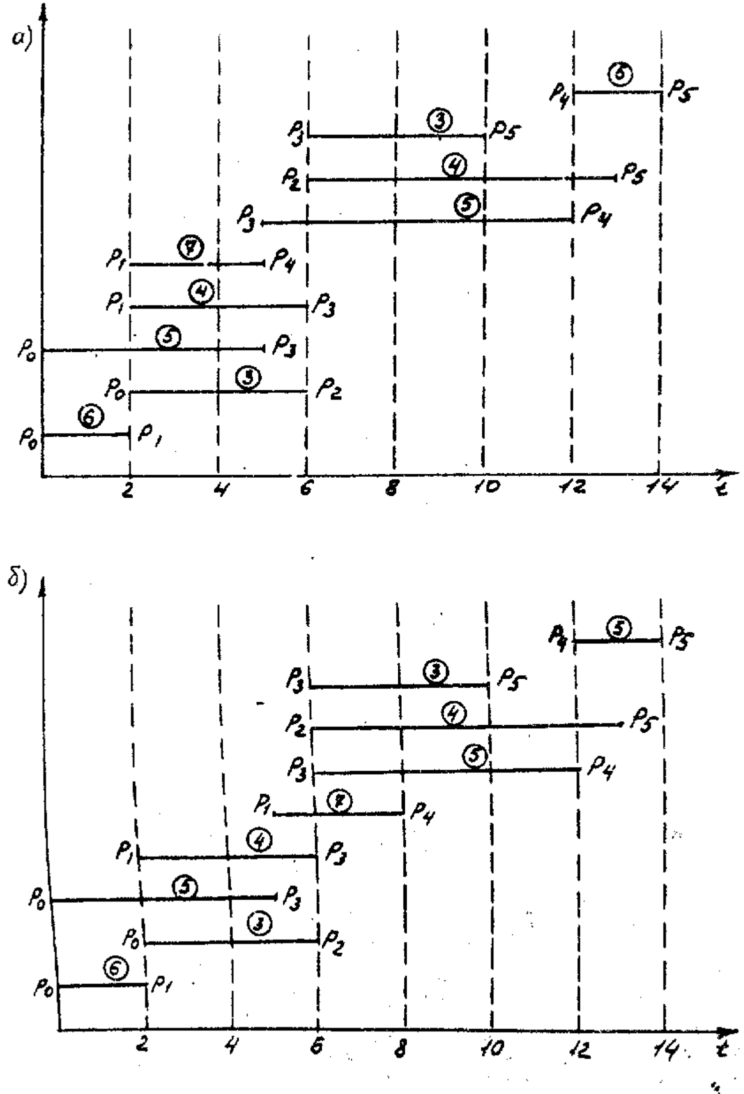


Рис. 3.7. Изменение линейной диаграммы проекта в ходе оптимизации

Считая началом оставшейся части проекта момент $\tau_1 = 2$ дня, устанавливаем все работы на новое минимальное время их начала. Так как пока лишь сдвинуте одна работа ($P_0 P_2$), то это повлечет только изменение $T_2^{(PH)} = 4$, на два дня, т.е. получим новое $T_2^{(PH)} = 6$ и соответствующий сдвиг вправо работы ($P_2 P_5$), что показано на рис. 3.7а. Время выполнения проекта не уменьшилось ($T_5 = 14$). Начиная от момента $\tau_1 = 2$ дня, получим критический путь, составленный из работ ($P_1 P_3$), ($P_3 P_4$), ($P_4 P_5$).

Проектируем начало и концы всех работ на промежуток $[2, 14]$.

Нумеруем работы, расположенные над промежутком $[2, 5]$, т.е. работы ($P_0 P_2$) с $R_{02} = 1$, ($P_0 P_3$) - начатая работа; ($P_1 P_3$) - критическая работа; ($P_1 P_4$) с $R_{14} = 7$.

Считая, что начатая работа не должна прерываться, присваиваем этим работам следующие номера:

$(P_0 P_3)$ - номер 1;
$(P_1 P_3)$ - номер 2;
$(P_0 P_2)$ - номер 3;
$(P_1 P_4)$ - номер 4.

Суммируем затраты на эти работы, в порядке возрастания их номеров, т.е. к затратам 5 на работу ($P_0 P_3$), прибавляем 4 на работу ($P_1 P_3$). Полученная сумма 9 меньше наличия $R = 12$. Затем прибавляем число 3 - затраты, расходуемые на работу ($P_0 P_2$). Полученная сумма равна 12. Начало оставшейся работы ($P_1 P_4$) сдвигаем вправо к моменту $\tau_2 = 5$. Получим новую линейную диаграмму (рис. 3.7б).

Продолжая таким образом просмотр сетевого графика, получим окончательную диаграмму (рис. 3.8а), под которой для наглядности помещен график затрат на выполнение проекта.

Время T_5 с учетом ограниченности ресурса в объеме $R = 12$ изменилось на 3 дня и составило 17 дней. При этом времени выполнения проекта в эти новые сроки используемый ресурс не превосходит имеющегося в наличии.

3.3. Варианты задания по сетевому планированию

Исходные данные по вариантам сведены в табл. 3.2, где указаны взаимосвязь между работами того или иного проекта, продолжительность каждой работы и затраты на ее выполнение. Для каждого варианта также задается определенная величина ограниченного ресурса R_0 .

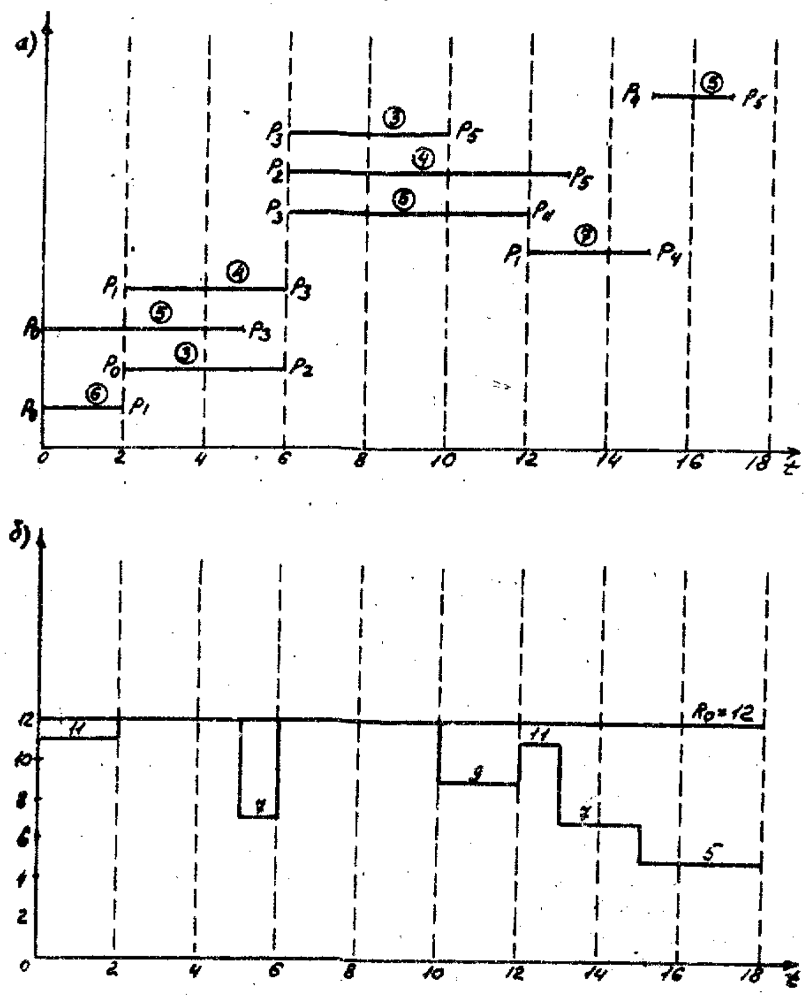


Рис. 3.8. Линейная диаграмма и затраты оптимизированного проекта

Для каждого варианта задания 3 требуется на основе исходных данных построить сетевой график и линейную диаграмму проекта, рассчитать секторным методом параметры сетевого графика, оптимально во времени распределить ограниченный ресурс.

Таблица 3.2

Исходные данные по вариантам задания

№ варианта	Ресурс	Работа	Каким работам предшествует	Характеристика работы	
				продолжительность	затраты
I	2	3	4	5	6
0	9	I	3,7	5	3
		2	4,8	4	2
		3	5,6	6	2
		4	5,6	4	5
		5	–	6	4
		6	9	4	6
		7	9	5	3
		8	–	2	2
		9	–	7	7
I	I4	I	7	4	4
		2	9	2	7
		3	4,5	3	4
		4	6	4	3
		5	–	7	7
		6	–	4	5
		7	9	5	3
		8	6	4	3
		9	–	3	4
2	I6	I	4	3	3
		2	5,6	3	4
		3	7	4	5
		4	8	5	5
		5	–	4	I
		6	8	4	I
		7	–	5	6
		8	–	2	3
		9	–	6	7

Продолжение табл. 3.2

I	2	3	4	5	6
		I	7	4	I
		2	8	6	3
		3	5,6	5	2
		4	9	4	2
3	7	5	9	3	2
		6	–	3	2
		7	8	5	3
		8	–	6	5
		9	–	5	4
		I	6	4	3
		2	4,5	3	2
		3	7,8	2	2
		4	7,8	4	3
4	9	5	9	7	5
		6	9	2	2
		7	9	5	3
		8	–	6	4
		9	–	5	6
		I	–	4	4
		2	8	3	2
		3	I,2,9	5	3
		4	6	3	2
5	6	5	7	3	2
		6	8	5	4
		7	–	3	3
		8	–	4	4
		9	7	6	3
		I	9	4	3
		2	I	2	2
		3	I	3	3
		4	2,5	2	2
6	II	5	9	7	5
		6	9	3	2
		7	6,8	5	4

Окончание табл. 3.2

I	2	3	4	5	6
		I	4,5	5	2
		2	8	3	I
		3	6,7	4	2
		4	8	6	3
7	8	5	9	4	2
		6	8	4	3
		7	–	6	4
		8	–	8	5
		9	–	3	3
		I	8	6	4
		2	3,4,5	5	3
		3	8	2	2
		4	6,7	4	3
8	9	5	–	6	4
		6	–	4	3
		7	9	6	4
		8	9	7	5
		9	–	3	2
		I	6,8	6	5
		2	3,4,5	4	3
		3	6,8	3	2
		4	7	5	3
9	I0	5	–	7	4
		6	7	5	3
		7	–	3	2
		8	9	4	2
		9	–	2	I

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демина Е.В. и др. Организация, планирование и управление предприятиями связи. – М.: Радио и связь, 1990.

2. Зуховицкий С.И., Радчик М.А. Математические методы сетевого планирования. – М.: Радио и связь, 1978.

3. Барсук В.А., Губин Н.М. Математические методы планирования и управления в хозяйстве связи. – М.: Радио и связь, 1987.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Методические указания
и задание на контрольную работу
по дисциплине
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

для студентов-заочников 4 курса
(специальность 060800)

Подписано в печать 16.04.99г. Формат 60x84/16. Печать офсетная.
Объем 3,3 усл.п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 155.
ЗАО «Информсвязьиздат» Москва, ул.Авиамоторная, 8.